(Testfragen)

a) Es gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ für alle $x \in [0,1)$.

b) Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ist punktweise konvergent auf $[0,1)$.

c) Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf ihrem Definitionsbereich D punktweise konvergiert, dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch punktweise auf D.

d) Die Aussage c) gilt umgekehrt.

(G 1) Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz von Funktinenreihen und -folgen
Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n = \sqrt[n]{n^2x^3}, \quad x \in [0,2];$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}, \quad x \in [0,1];$

(c) $g_n = \sin\dfrac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Lösung:

(a) Für $x \in (0,2]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2x^3} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \cdot \sqrt[n]{x}^3 = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2 \cdot (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x})^3 = 1 \cdot 1 = 1$$

Für x=0 ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot x^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

Also ist (f_n) punktweise konvergent auf [0,2] mit der Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x \in (0,2] \end{cases}.$$

Da f nicht stetig ist, aber f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig auf [0,5] ist, kann (f_n) auf [0,5] nicht gleichmäßig konvergieren.

(b) Für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{nx^2}{n^3+x^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die Funktionenreihe gleichmäßig auf [0,1] nach Satz 25.2. Damit konvergiert sie insbesondere auch punktweise.

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ und da die Sinus-Funktion stetig ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{x}{n}) = \sin(0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Also konvergiert (g_n) punktweise gegen die Nullfunktion.
Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn:

$$\text{Setze } x_n = \tfrac{n\pi}{2}. \text{ Dann gilt } g_n(x_n) = \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} [\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)|] &= \lim_{n\to\infty} [\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)|] \\ &\geq \lim_{n\to\infty} 1 = 1 > 0 \end{aligned}$$

Damit kann (g_n) wegen Satz 25.1 nicht gleichmäßig konvergieren.

(G 2) Vertauschung von Limes und Integral
Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n = \frac{2x}{n} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}, \quad x \in [0,1].$$

(a) Untersuchen Sie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie

$$I_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

und vergleiche die Ergebnisse. Gibt es dafür eine theoretische Erklärung?

Lösung:

(a) (f_n) konvergiert auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn (vgl. Satz 25.1)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \right] &= \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{2x}{n} e^{\frac{x^2}{n}} \right| \right] \leq \lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x\in[0,1]} \frac{2\cdot 1}{n} e^{\frac{1}{n}} \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[n]{e}}{n} = 0. \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Funktionenfolge insbesondere auch punktweise.

(b)

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{2x}{n} e^{\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{x^2}{n}} \Big|_0^1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^0 \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{e} - 1 \right) = 0 \\ I_2 &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0 \quad \mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Also gilt $I_1 = I_2$, was wegen (a) auch sofort aus Satz 25.4 folgt.

(G 3) Gleichmäßige Konvergenz und Ableitung.
Wir betrachten die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ mit } f_n(x) = nx^{n-1}.$$

Zeige, dass für alle $x \in (-1,1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Hinweis: Bestimme eine Stammfunktion von f_n.
Lösung:

(a) Der Schritt $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{n}{1+x^2n^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{1+x^2n^2}\,\mathrm{d}x$ ist falsch.
Damit dieser Schritt gerechtfertigt wäre, müsste die Funktionenfolge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = \frac{n}{1+x^2n^2}$ gleichmäßig auf $[0,1]$ konvergieren (vgl. Satz 25.4), was hier offensichtlich nicht der Fall ist.

(b) Setzt man $g_n(x) = x^n$ für alle $x \in (-1,1)$, so erhält man eine Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(x)$, die punktweise auf $(-1,1)$ gegen $\frac{1}{1-x}$ konvergiert (geometrische Reihe) und für die $g_n'(x) = f_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in (-1,1)$ gilt.
Zur Anwendung von Satz 25.5 zeigen wir, dass für jedes $\lambda \in (0,1)$ die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig auf $(-\lambda,\lambda)$ konvergiert.
Es ist

$$|f_n(x)| = |nx^n| = n|x|^n \le n\lambda^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n\lambda^n \text{ konvergent,}$$
$$\text{da } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\lambda^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\lambda = \lambda < 1 \text{ (Wurzelkriterium),}$$

also folgt die gleichmäßige Konvergenz aus Satz 25.2.
Sei nun $x \in (-1,1)$ fest. Dann existiert ein $\lambda \in (|x|,1)$, so dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n'(x)$ auf $(-\lambda,\lambda)$ gleichmäßig konvergiert.
Wir können also mit Satz 25.5 (angewandt auf die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(x)$) folgern:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\right]' = \left[\frac{1}{1-x} - 1\right]' \\ = \frac{1}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$