



9. Übung zu Riemannsche Geometrie

Aufgabe 37 – Rechenaufgabe zu Möbiustransformationen:

- Was ist die Inverse der Cayley-Abbildung $\eta(z) = \frac{z-i}{z+i}$?
- Sei $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. Bestätigen Sie $\text{Im}(Ai) > 0$, d.h. der Imaginärteil der Möbiustransformation zu A ist im Punkt i positiv.
(Wegen $A(\mathbb{R}) \subset \mathbb{S}^1$ und $z \mapsto Az$ bijektiv, reicht dies um $A(H^2) \subset H^2$ zu zeigen.)

Aufgabe 38 – Hyperbolische Fläche in \mathbb{R}^3 :

Zeigen Sie: Die Rotationsfläche der Traktrix ist lokal isometrisch zu H^2 mit der hyperbolischen Metrik.

Aufgabe 39 – Metriken auf der oberen Halbebene:

- Zeigen Sie: Die Kurve $t \mapsto (0, 1-t) \in H^2$ für $t \in (0, 1)$ hat unendliche Länge in der hyperbolischen Metrik der oberen Halbebene.
- Zeigen Sie: Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, $g = \frac{1}{y} \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht vollständig.
- Zeigen Sie direkt: Jede Cauchy-Folge in H^2 mit der hyperbolischen Metrik konvergiert.
Tipp: Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge von 0 weg beschränkte y -Koordinaten hat.

Aufgabe 40 – Schar geschlossener Geodätischer:

Sei M Riemannsch und $h : [-\epsilon, \epsilon] \times [0, 1] \rightarrow M$ eine Schar geschlossener Geodätischer, d.h. für alle $s \in [-\epsilon, \epsilon]$ ist $t \mapsto h_s(t)$ geschlossene Geodätische (mit $\|\frac{\partial h}{\partial t}\|$ konstant). Zeigen Sie: Alle Kurven h_s haben die gleiche Länge $\ell(h_s)$.

Aufgabe 41 – Kürzeste auf Polyedern:

- Es sei M die Oberfläche eines Würfels. Wir wollen die Kürzeste in M zwischen zwei Punkten $p, q \in M$ ermitteln. Es sei p der Mittelpunkt einer Würfelfläche F und q :
 - Mittelpunkt auf einer Nachbarfläche, oder
 - Mittelpunkt einer Kante, die nur eine Ecke mit F gemeinsam hat.Kann man p, q so wählen, dass eine Kürzeste durch eine Ecke läuft?
- Versuchen Sie Kürzeste auf allgemeinen Polyedern zu analysieren, indem Sie unterscheiden: Innerhalb der Flächen, in Kanten, in Ecken mit Gesamtwinkel $<, =, > 2\pi$.
Tipp: Eine Möglichkeit, Kürzeste in den Ecken zu verstehen, ist es, Kürzeste auf drei, vier oder fünf zusammengeklebten Vierecken zu verstehen.

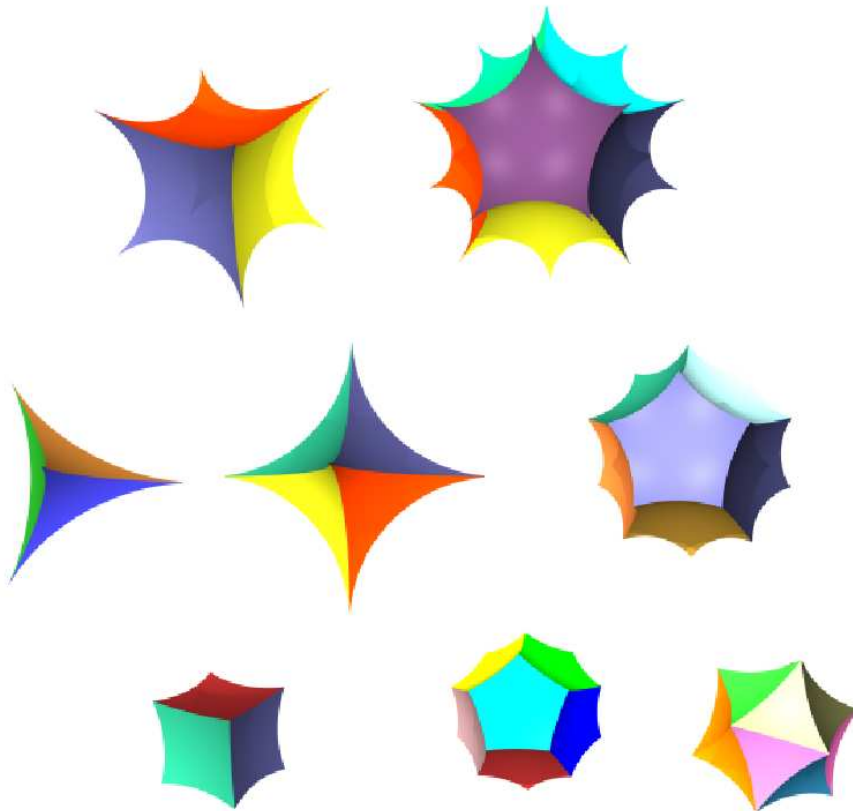
Aufgabe 42 – Exponentialabbildung und Vollständigkeit:

- Sei \exp_p auf ganz $T_p M = \mathbb{R}^n$ definiert. Zeigen Sie, dass für jedes $q \in M$ ein $v \in T_p M$ existiert, so dass $t \mapsto \exp_p tv$ auf $[0, 1]$ parametrisierte Kürzeste von p nach q ist.
Tipp: Der in der Vorlesung gegebene Beweis des Satzes II,36 von Hopf-Rinow beweist dies!
- Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Gibt es ein $p \in M$, so dass \exp_p auf ganz $\mathbb{R}^n = T_p M$ definiert ist, so ist M vollständig.

Aufgabe 43 – Produktmannigfaltigkeiten:

M_1 und M_2 seien differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $M := M_1 \times M_2$ ihr Produkt. Es seien g_1 und g_2 Riemannsche Metriken auf M_1 bzw. M_2 . Wir definieren die *Produktmetrik* auf M durch $g_{(p,q)}(X, Y) := g_{1p}(d\pi_1 \cdot X, d\pi_1 \cdot Y) + g_{2q}(d\pi_2 \cdot X, d\pi_2 \cdot Y)$ für alle $(p, q) \in M$ und $X, Y \in T_{(p,q)}M$, wobei π_i die Projektion von M auf M_i sei ($i = 1, 2$). Verifizieren Sie, daß g tatsächlich eine Riemannsche Metrik ist.

Zeigen Sie $\nabla_X Y = (\nabla_{d\pi_1 X}^1 d\pi_1 Y, \nabla_{d\pi_2 X}^2 d\pi_2 Y)$ durch Benutzung der Koszul-Formel.



Von den regulären Polyedern in \mathbb{R}^3 pflastert lediglich der Würfel. Im hyperbolischen Raum \mathbb{H}^3 pflastern die acht abgebildeten Polyeder. Um zu pflastern, muß der *Diederwinkel*, d.h. der Winkel längs der Kanten, von der Form 2π durch eine natürliche Zahl sein. Während in \mathbb{R}^3 der Diederwinkel konstant ist, fällt er für \mathbb{H}^3 monoton mit der Größe des Polyeders. Daher pflastern die Polyeder nur bei Wahl der richtigen Kantenlänge.

Der Startwert der Diederwinkel-Funktion ist bekannt: Wenn das Polyeder auf einen Punkt zusammenschrumpft, konvergieren die Diederwinkel gegen den Wert des entsprechenden regulären Polyeders in \mathbb{R}^3 . Anders als in \mathbb{R}^3 liegen auch für unendliche Kantenlänge (d.h. bei Ecken in \mathbb{S}^2 im Poincaré-Modell) Kanten und Seiten noch im Endlichen. Wenn die Diederwinkel passend sind, erlauben auch solche *idealen Polyeder* eine Pflasterung.

Das Bild zeigt sämtliche den \mathbb{H}^3 pflasternden Polyeder im Poincaré-Modell. Dabei ist der den \mathbb{H}^3 darstellende Ball stets in gleicher Größe gewählt, und das Polyeder liegt symmetrisch zum Ursprung; die idealen Polyeder erscheinen damit am größten. Wir zählen die Polyeder nun zusammen mit ihren Diederwinkeln auf. Das ideale 60° -Tetraeder; der 72° -Würfel, der ideale 60° -Würfel; das ideale 90° -Oktaeder; das $90^\circ, 72^\circ, 60^\circ$ -Dodekaeder (das letzte davon ideal); das 120° -Ikosaeder.