Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Joswig
Dr. Davorin Lešnik
Dipl.-Math. Katja Kulas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2011
09.05.-11.05.11

4. Übungsblatt zur „Mathematik II für Maschinenbau“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Länge einer Kurve)

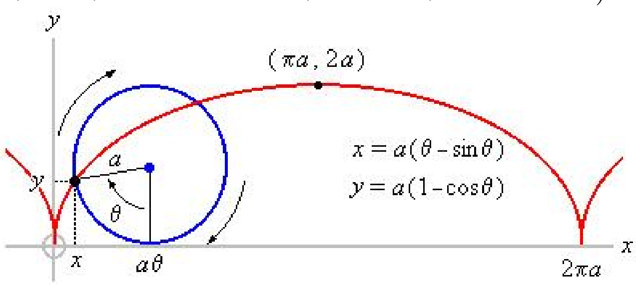
Am Reifen eines Fahrrades (Radius 1) wird ein kleiner leuchtender Punkt angebracht. Wenn das Rad abgerollt wird beschreibt der leuchtende Punkt eine spezielle Kurve γ. Diese wird (gewöhnliche) Zykloide genannt.

(a) Skizzieren Sie die Kurve γ (in der Ebene) und machen Sie sich klar, dass $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$ eine mögliche Parametrisierung dieser Zykloide ist.

(b) Berechnen Sie die Länge der Kurve γ (einer einzigen Periode).

Lösung:

(a) Für einen beliebigen Radius a ergibt sich folgende Rollkurve (Quelle: `http://commons.bcit.ca/math/entertainment/coaster/index.html`)



Die Kurve setzt sich zusammen aus einer Translation des Mittelpunktes und der Rotation des Kreises, also $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$

(b) $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\dot\gamma(t)|dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(t))}dt$
$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos^2(\frac{t}{2}) + \sin^2(\frac{t}{2}))}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2(\frac{t}{2})}dt = \int_0^{2\pi} 2\sin(\frac{t}{2})dt = -4\cos(\frac{t}{2})|_0^{2\pi}$
$= 8.$
Hierbei wurde das Additionstheorem $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ verwendet.

Aufgabe G2 (Krümmung einer Kurve)

Bestimmen Sie Torsion und Krümmung der Kurve $\gamma(t) = \left(t, t^2/2, t^3/6\right)^T$.

Lösung:

Tangenteneinheitsvektor: $T(t) = \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} = \frac{2}{2+t^2}(1, t, t^2/2)^T$

Hauptnormaleneinheitsvektor: $N(t) = \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|} = \frac{2}{2+t^2}(-t, 1-\frac{t^2}{2}, t)^T$

Binormaleneinheitsvektor: $B(t) = T(t) \times N(t) = \frac{2}{2+t^2}(\frac{t^2}{2}, -t, 1)^T$

Krümmung: $\kappa(t) = \frac{\|\dot{T}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{4}{(2+t^2)^2}$

Torsion: $\tau(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)\cdot(\ddot{\gamma}(t)\times\dddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\|^2} = \frac{\det(\dot{\gamma}(t),\ddot{\gamma}(t),\dddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\|^2} = \frac{4}{(2+t^2)^2}$

$T(t), N(t)$ und $B(t)$ bilden das sogenannte *begleitende Dreibein*. Krümmung und Torsion sind in diesem Beispiel längs der Kurve gleichgroß.

Aufgabe G3 (Graphen und Höhenlinien)

Im mathematischen Institut in Neustadt an der Weierstraße wurde eingebrochen. Es fehlen nur ein paar konvergente Reihen, aber bei den Funktionen in zwei Variablen ist vieles durcheinander geraten. Helfen Sie, die Graphen und Höhenlinien der folgenden Funktionen (siehe folgende Seite) wieder richtig zu ordnen?

$$
\begin{array}{lll}
f_1(x,y) = x+y-1, & f_2(x,y) = x^2+4y^2, & f_3(x,y) = x^2-y^2-8, \\
f_4(x,y) = \sin(x), & f_5(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}, & f_6(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+10}, \\
f_7(x,y) = \ln(x^2+y^2), & f_8(x,y) = \tan(x^2+y^2), & f_9(x,y) = e^{x+y}, \\
f_{10}(x,y) = x^3-y^2+4, & f_{11}(x,y) = \sin(x)\cdot\sin(y), & f_{12}(x,y) = \sqrt{|x|}+y
\end{array}
$$

Aufgabe G4 (Topologie im $\mathbb{R}^2$)

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{array}{ll}
A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1,\ |y|<1\}, & E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-3)^2+(y-5)^2=4\}, \\
B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|<1,\ |y|\le 1\}, & F = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-3)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=4\}, \\
C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le 1,\ |y|\le 1\}, & G = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-3)^2+(y-5)^2=4, z=1\}, \\
D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q},\ y\in[-1,1]\}, & H = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x-3)^2+(y-5)^2=4\}.
\end{array}
$$

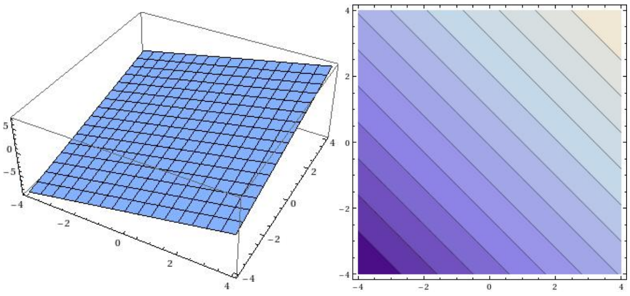
Was sind ihre Randpunkte? Welche dieser Mengen sind abgeschlossen oder kompakt, welche sind offen?

Lösung: Die Skizzen der Mengen A, B, C sind jeweils ein Quadrat in $\mathbb{R}^2$ mit Randpunkten $(-1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$. Der nicht zugehoerige Rand sollte kenntlich gemacht werden. Die Menge D, laesst sich nicht sinnvoll zeichnen, da für alle rationalen q die vertikalen Linien zwischen Punkten $(q,1), (q,-1)$ gezeichnet werden müssten. Bei E handelt es sich lediglich um eine verschobene Ellipse (ohne Inhalt) und bei F um einen verschobenen Ellipsoiden (ohne Inhalt). G ist ein Ellipsoid (ohne Inhalt), der um 1 nach oben verschobenen xy-Ebene des $\mathbb{R}^3$ liegt. H skizziert man als übereinander geschichtete Ellipsen (ohne Inhalt), die parallel zur xy-Ebene liegen. Ob der Rand zu der Menge gehört sollte mit Pfeilen notiert werden.

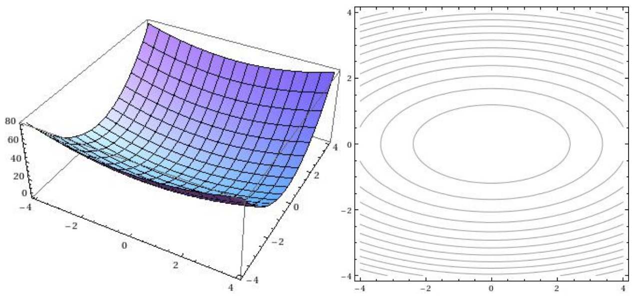
Die Randpunkte sind:

$$
\begin{aligned}
&\partial A = \partial B = \partial C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; (|x|\le 1 \wedge |y|=1) \vee (|y|\le 1 \wedge |x|=1)\}, \\
&\partial D = \mathbb{R}\times[-1,1], \\
&\partial E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \| (x-3)^2+(y-5)^2=4\}, \\
&\partial F = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \| (x-3)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=4\}, \\
&\partial G = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \| (x-3)^2+(y-5)^2=4, z=1\}, \\
&\partial H = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \| (x-3)^2+(y-5)^2=4\}.
\end{aligned}
$$

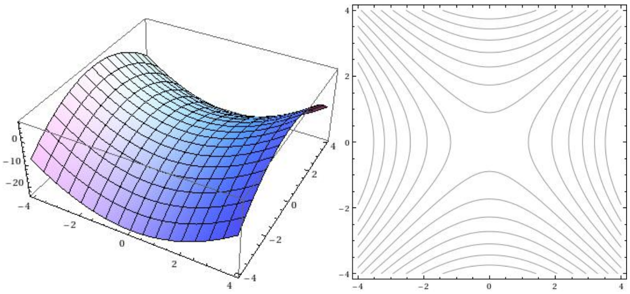
Die Menge A ist offen. C ist abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt. B und D sind weder offen noch abgeschlossen. E, F und G sind abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. H ist abgeschlossen aber unbeschränkt. Also nicht kompakt.



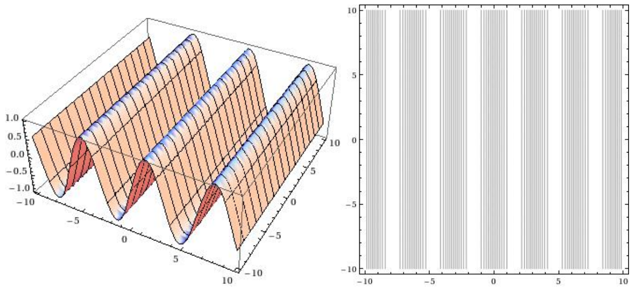
(a) $f_1(x,y) = x + y - 1$



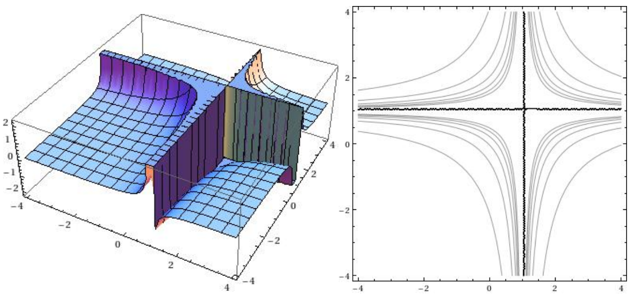
(b) $f_2(x,y) = x^2 + 4y^2$



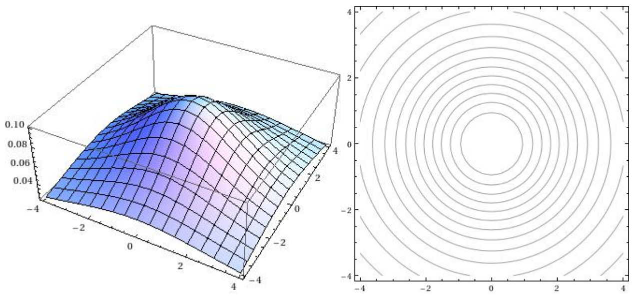
(c) $f_3(x,y) = x^2 - y^2 - 8$



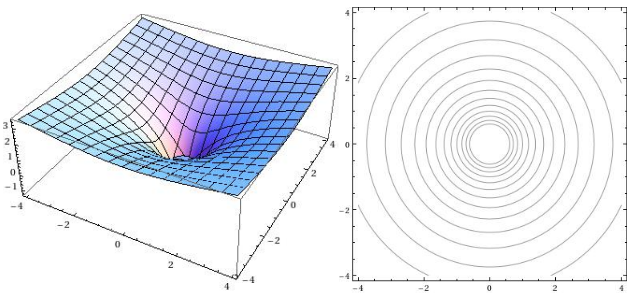
(d) $f_4(x,y) = \sin(x)$



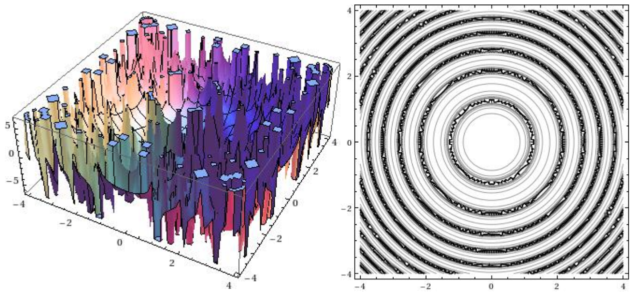
(e) $f_5(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$



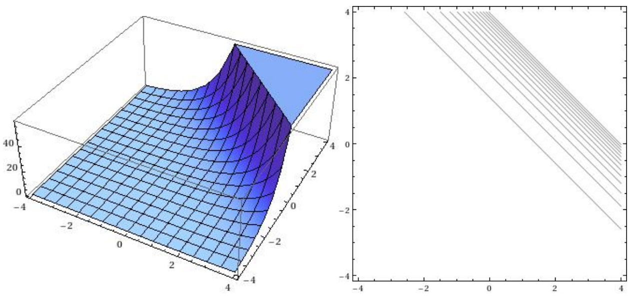
(f) $f_6(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+10}$



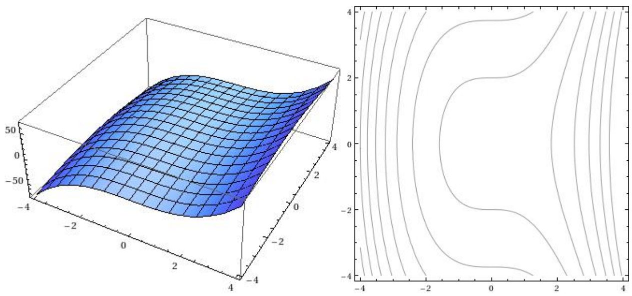
(g) $f_7(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$



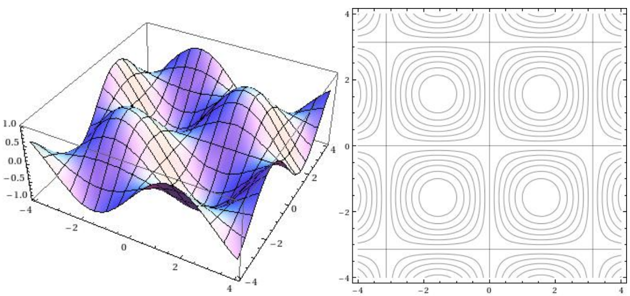
(h) $f_8(x,y) = \tan(x^2 + y^2)$

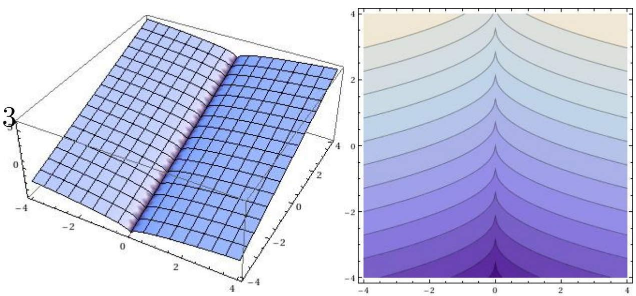


(i) $f_9(x,y) = e^{x+y}$



(j) $f_{10}(x,y) = x^3 - y^2 + 4$





Hausübung

– Abgabe am 16.05.-18.05.11 in der Übung –

Aufgabe H1 (Länge einer Kurve) (4 Punkte)

Parametrisieren Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \cosh x$ und berechnen Sie dessen Bogenlänge für $-1 \leq x \leq 1$.

Lösung: Die Parametrisierung lautet:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix};\ -\infty < t < \infty.$$

Bezeichnen wir die Bogenlänge des Graphen mit $\mathcal{L}(\gamma)$ so gilt:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{-1}^{1} \mid \dot{\gamma}(t) \mid \cdot dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2 t} \cdot dt = \int_{-1}^{1} \cosh t \cdot dt$$

$$= \sinh t \mid_{-1}^{1} = \sinh 1 - \sinh(-1) = 2 \sinh 1 = e - e^{-1}.$$

Aufgabe H2 (Schmiegeebene einer Kurve) (4 Punkte)

Berechnen Sie das begleitende Dreibein der Kurve $\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)^T$ an der Stelle $t = 0$ und geben Sie deren Schmiegeebene für $t = 0$ an.

Lösung:

Tangenteneinheitsvektor: $T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1)^T$, $T(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$

Hauptnormaleneinheitsvektor: $N(t) = \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\tan(t) - 1, 1 - \tan(t), 0)^T$, $N(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T$

Binormaleneinheitsvektor: $B(0) = T(0) \times N(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$

Schmiegeebene: $E(0) : \gamma(0) + \lambda T(0) + \mu N(t) = (1, 0, 1)^T + \lambda(1, 1, 1)^T + \mu(-1, 1, 0),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Aufgabe H3 (Graphen und Höhenlinien) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 4x^2 + y^2 - 1.$$

(a) Skizzieren Sie die Niveaulinien von f.

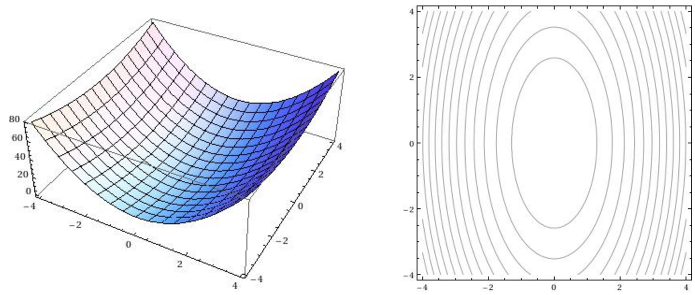
(b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

(c) Nimmt f ihr Maximum bzw. Minimum auf der Menge $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$ an? Wenn ja, wo?

Lösung:

(a),(b) je Skizze

c) D ist kompakt. Also wird sowohl das Maximum als auch das Minimum angenommen. Man überlegt sich leicht (z.B. auch anhand der Höhenlinien), dass die Maxima in den Eckpunkten von D (mit z.B. $f(1, 1) = 4$) und das Minimum im Punkt $(0, 0)^\top$ (mit $f(0, 0) = -1$) angenommen werden.



(m) $f_1(x, y) = 4x^2 + y^2 - 1$

Aufgabe H4 (Topologie im $\mathbb{R}^2$) (8 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy < 0\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \sin x = 0\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}.$$

Was sind ihre Randpunkte? Welche dieser Mengen sind abgeschlossen oder kompakt, welche sind offen?

Lösung: Die Menge A besteht aus dem zweiten und dritten Quadranten des x-y-Koordinatensystems ohne x- und y-Achse. Die Menge B besteht aus allen Geraden $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Mengen C und D bilden eine Ellipse, einmal mit und einmal ohne Rand.

Die Mengen der Randpunkte von A, B, C und D sind:

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}, \quad \partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sin(x) = 0\},$$
$$\partial C = \partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}.$$

Die Mengen A und D sind offen. Die Menge B ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt und somit auch nicht kompakt. Die Menge C ist abgeschlossen und beschränkt, d.h. kompakt.