Logik erster Stufe FO

Sonderstellung als *die* Logik für die Grundlegung der Mathematik

- natürliche Semantik (Tarski) und große Ausdrucksstärke
- vollständige Beweiskalküle (Gödelscher Vollständigkeitssatz)

Alfred Tarski (1901–83)

Kurt Gödel (1906–78)

mit Einstein, 1950

Gegenstandsbereich

Beispiele von FO-Formeln mit außerlogischen Symbolen $\cdot$, 1:

$\varphi = \forall x \exists y (x \cdot y = 1) \qquad \psi(x) = \exists y (x \cdot y = 1)$

Gegenstandsbereich:
Strukturen zu gegebener Symbolmenge σ
(z.B. Algebren, relationale oder arithmetische Strukturen)
mit Relationen, Funktionen, Konstanten über Trägermenge

FO erlaubt Quantifizierung über (Element-)Variablen

Grundlegenede Definitionen:
Symbolmengen/Signaturen σ und σ-Strukturen
Variablen-Belegungen und σ-Interpretationen

$\mathrm{FO}(\sigma)$-Formeln spezifizieren Eigenschaften von
Tupeln von Elementen in σ-Strukturen $\rightarrow$ Semantik

FO Syntax

- **σ-Terme:**
  aufgebaut aus Variablen und Konstanten
  mittels Funktionssymbolen in σ

  Terme bezeichnen Elemente (in σ-Interpretationen)
  $\rightarrow$ Semantik von Termen

- **σ-Formeln:**
  $\varphi \in \mathrm{FO}(\sigma)$ werden aufgebaut aus atomaren Formeln
  (Termgleichungen und Relationen)
  durch boolesche Junktoren ($\wedge, \vee, \neg$ wie in AL)
  und Variablen-Quantifizierung ($\forall x, \exists x$)

Leitmotiv: extensionale Semantik (Tarski) anhand von Variablen-Belegungen in σ-Strukturen (Interpretationen)

Syntax: σ-Terme

für $\sigma = (R, \dots, f, \dots, c, \dots)$ mit
Relationssymbolen R (mit fixierter Stelligkeit)
Funktionssymbolen f (mit fixierter Stelligkeit)
Konstantensymbolen c

und Standard-Variablenmenge $V = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$
(wir benutzen $x, y, z, \dots$ als typische Vertreter, 'Meta-Variablen')

σ-Terme

$\mathrm{T}(\sigma, V)$ erzeugt durch (Kalkülschreibweise):

$$\frac{}{x}\ x \in V \qquad \frac{}{c}\ c \in \sigma \qquad \frac{t_1, \dots, t_n}{f\ t_1 \dots t_n}\ f \in \sigma,\ n\text{-stellig}$$

Semantik: σ-Terme

in $\boxed{\begin{array}{l}\sigma\text{-Interpretation}\\ \mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)\end{array}}$ $\begin{cases} \mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}}, \dots, c^{\mathcal{A}}, \dots) \\ \sigma\text{-Struktur, mit Belegung } \beta\colon V \to A \end{cases}$

definiere $t^{\mathcal{I}} \in A$ induktiv für $t \in \mathrm{T}(\sigma, V)$:

$$\begin{aligned} x^{\mathcal{I}} &:= \beta(x) \\ c^{\mathcal{I}} &:= c^{\mathcal{A}} \\ (f\, t_1 \dots t_n)^{\mathcal{I}} &:= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{I}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}}) \end{aligned}$$

Terme t bezeichnen Elemente $\mathbf{t}^{\mathcal{I}}$ in $\boldsymbol{\sigma}$-Interpretationen $\mathcal{I}$

Syntax: $\mathrm{FO}(\sigma)$-Formeln

$\mathrm{FO}(\sigma)$-Formeln

$\mathrm{FO}(\sigma)$ erzeugt durch (Kalkülschreibweise):

(F1) $\dfrac{}{t = t'}$ $t, t' \in \mathrm{T}(\sigma, V)$

(F2) $\dfrac{}{Rt_1 \dots t_n}$ $R \in \sigma$, n-st. $t_i \in \mathrm{T}(\sigma, V)$

(F3) $\dfrac{\varphi}{\neg\varphi}$

(F4) $\dfrac{\varphi_1, \varphi_2}{(\varphi_1 * \varphi_2)}$ $* = \wedge, \vee$

(F5) $\dfrac{\varphi}{\mathrm{Q}x\varphi}$ $x \in V$, $\mathrm{Q} = \exists, \forall$

(F1/2): atomare Formeln (F1–4): quantorenfreie Formeln

Semantik: $\mathrm{FO}(\sigma)$-Formeln

$\boxed{\mathcal{I} \models \varphi \quad \text{bzw.} \quad [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1}$

in σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$
(σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit Belegung β)

definiere den Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \mathbb{B}$, d.h. wann $\mathcal{I} \models \varphi$,
induktiv über den Aufbau von $\varphi \in \mathrm{FO}(\sigma)$:

(F1) $\mathcal{I} \models t = t'$ gdw. $t^{\mathcal{I}} = t'^{\mathcal{I}}$

(F2) $\mathcal{I} \models Rt_1 \dots t_n$ gdw. $(t_1^{\mathcal{I}}, \dots, t_n^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{A}}$

(F3/4) genau wie in AL

(F5) $\mathcal{I} \models \exists x\varphi$ gdw. $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ für mindestens ein $a \in A$

$\mathcal{I} \models \forall x\varphi$ gdw. $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ für alle $a \in A$

dabei entsteht $\mathcal{I}\frac{a}{x} = (\mathcal{A}, \beta\frac{a}{x})$ aus $\mathcal{I} = (\mathcal{A})$
durch die Modifikation von β gemäß $x \mapsto a$

freie Variablen

$\mathrm{frei}\colon \mathrm{FO}(\sigma) \to \mathcal{P}(V)$
weist der Formel φ die Menge ihrer *freien* Variablen zu

induktiv:
(F1) $\mathrm{frei}(t = t') := \mathrm{var}(t) \cup \mathrm{var}(t')$
(F2) $\mathrm{frei}(Rt_1 \dots t_n) := \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{var}(t_i)$
(F3) $\mathrm{frei}(\neg\varphi) := \mathrm{frei}(\varphi)$
(F4) $\mathrm{frei}(\varphi_1 * \varphi_2) := \mathrm{frei}(\varphi_1) \cup \mathrm{frei}(\varphi_2)$
(F5) $\mathrm{frei}(Qx\varphi) := \mathrm{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$

$\mathrm{FO}_n(\sigma) := \{\varphi \in \mathrm{FO}(\sigma)\colon \mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}\}$

Schreibe auch $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ für $\varphi \in \mathrm{FO}_n(\sigma)$

Sätze: Formeln ohne freie Variable, $\mathrm{frei}(\varphi) = \emptyset$, $\varphi \in \mathrm{FO}_0(\sigma)$

freie Variablen und Semantik

Beobachtung: Für $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ und $\mathcal{I}' = (\mathcal{A}, \beta')$ mit $\beta \upharpoonright \mathrm{frei}(\varphi) = \beta' \upharpoonright \mathrm{frei}(\varphi)$: $\mathcal{I} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{I}' \models \varphi$

Beweis: Induktion über den Aufbau von φ

Schreibweisen:
für $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{FO}_n$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$:

$$\mathcal{A}, \mathbf{a} \models \varphi,\ \mathcal{A} \models \varphi[\mathbf{a}] \quad \text{wenn} \quad \begin{cases} \mathcal{I} \models \varphi \text{ für } \mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta) \\ \text{mit einer/jeder Belegung } \beta\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \end{cases}$$

Sätze: Für $\varphi \in \mathrm{FO}_0(\sigma)$, $\mathrm{frei}(\varphi) = \emptyset$, ist die Semantik unabhängig von der Belegung der Variablen: $\mathcal{A} \models \varphi$ oder $\mathcal{A} \not\models \varphi$

Sätze und Satzmengen definieren Strukturklassen:
$\mathrm{Mod}(\varphi) = \{\mathcal{A}\colon \mathcal{A} \models \varphi\}$ die *Modellklasse* von φ;
analog für Satzmengen $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(\sigma)$.

relationale Semantik

relationale Semantik:
Evaluationsfunktion für $\mathrm{FO}_n(\sigma)$ über σ-Struktur $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{rcl} [\![\cdot]\!]^{\mathcal{A}}\colon \mathrm{FO}_n(\sigma) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A^n) \\ \varphi & \longmapsto & [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}} := \{\mathbf{a} \in A^n\colon \mathcal{A}, \mathbf{a} \models \varphi\} \end{array}$$

Evaluationsfunktion $\varphi \longmapsto [\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}} := \{\mathbf{a} \in A^n\colon \mathcal{A}, \mathbf{a} \models \varphi\}$

liefert Korrespondenzen
zwischen booleschen Junktoren und Mengenoperationen

$$[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!] = [\![\varphi_1]\!] \cap [\![\varphi_2]\!]$$
$$[\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!] = [\![\varphi_1]\!] \cup [\![\varphi_2]\!]$$
$$[\![\neg\varphi]\!] = A^n \setminus [\![\varphi]\!]$$

und zwischen existenzieller Quantifizierung und Projektion/Zyllindrifizierung

$$[\![\exists z\varphi]\!] = (\pi_z)^{-1}(\pi_z([\![\varphi]\!]))$$

Beispiele für elementare und Δ-elementare Klassen

elementare Klassen

durch einzelne FO-Sätze axiomatisierbare Strukturklassen:

- lineare Ordnungen, partielle Ordnungen, Äquivalenzrelationen
- Gruppen, Ringe, Körper, Boolesche Algebren

Δ-elementare Klassen

durch unendliche FO-Satzmengen axiomatisierbar:

- die Klasse der unendlichen Mengen
- die Klasse der Körper der Charakteristik 0, ...

Nachweis: Formalisierungen angeben!

Beispiele für nicht Δ-elementare Klassen

nicht durch irgendwelche FO-Satzmengen axiomatisierbar:

- die Klasse der endlichen Mengen
- die Klasse der Wohlordnungen
- die Klasse der zusammenhängenden Graphen
- die Klasse aller Körper endlicher Charakteristik
- die Isomorphieklasse irgendeiner festen unendlichen Struktur (!)

Nachweis?

semantische Grundbegriffe

Erfüllbarkeit

Allgemeingültigkeit

Folgerungsbeziehung $\Phi \models \varphi$

logische Äquivalenz $\varphi \equiv \psi$

alles analog zu AL, mit den hier relevanten Interpretationen

Beispiele: $\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi \qquad \forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi$

Vollständigkeit und Kompaktheit

Gödelscher Vollständigkeitssatz

Die Logik erster Stufe besitzt einen korrekten und vollständigen Beweiskalkül (Sequenzenkalkül) bezüglich dessen f.a. $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\sigma)$ und $\varphi \in \mathrm{FO}(\sigma)$ gilt:

(1) $\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi \vdash \varphi$

(2) Φ konsistent gdw. Φ erfüllbar

Ableitbarkeit (einer Formel aus einer Formelmenge) und Konsistenz (Widerspruchsfreiheit) bezüglich des Kalküls sind analog zum AL-Sequenzenkalkül K definiert

Beweis: $\longrightarrow$ Introduction to Mathematical Logic