Peter Beckmann

KOMPETENZFRAGEN BEI MATHEMATIK-LEHRFILMEN

I. Beim Einsatz von Lehrfilmen stellt sich immer wieder die Frage nach der Beurteilung des Films durch die jeweilige Zuschauergruppe. Dazu Hovland, Lumsdaine und Sheffield (1949, zitiert nach (2), S. 27) "Bewertungen sind dann besonders fruchtbar, wenn sie Aussagen über ein noch in der Entwicklung befindliches Unterrichtsinstrument gestatten. Dann können die Resultate dazu verwendet werden, Modifikationen und Änderungen des Unterrichtsmittels vorzunehmen".

Bevor jedoch Zuschauer bzw. Zuschauergruppen ein Urteil über einen Lehrfilm abgeben, sollte sichergestellt sein, daß sie auch die erforderliche Kompetenz dafür besitzen. Andernfalls besteht die Gefahr, daß die von Hovland, Lumsdaine und Sheffield erwähnten Modifikationen von Zuschauer-Bewertungen womöglich zu Verschlechterungen des Unterrichtsinstruments "Lehrfilm" führen statt zu Verbesserungen.

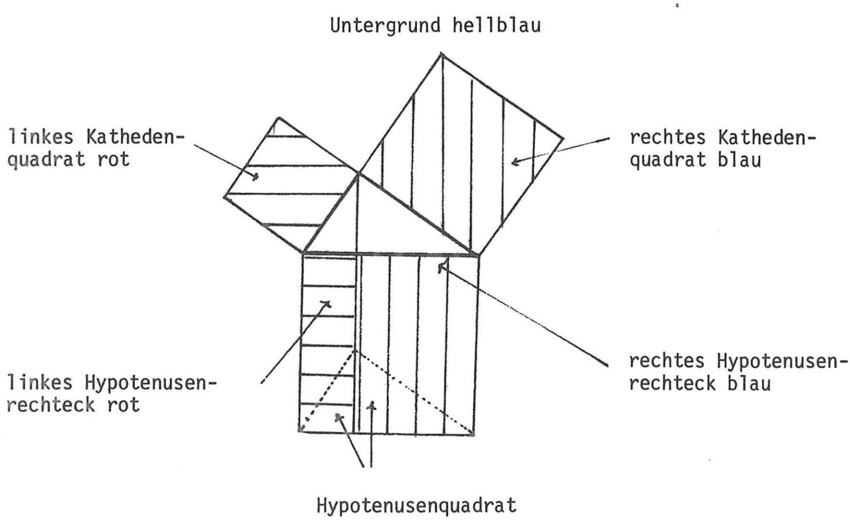
Ehe Kompetenzprobleme bei Lehrfilmen untersucht werden können, ist zu beachten, daß Lehrfilme einerseits Unterrichtsmittel, zum anderen aber Filme, das heißt Zeichensysteme sind. In semiotischer Hinsicht ist ein Lehrfilm (wie jeder andere Film) ein aus Einzelzeichen, etwa denen der Einstellungen, superiertes Superzeichen. Das Hauptproblem dieser Untersuchung, die Kompetenzfrage bei Zuschauergruppen, wird somit zu einer Frage nach Eigenschaften, die ein Interpret dieses Superzeichens besitzen oder nicht besitzen kann. Allgemein: Der Lehrfilm läßt sich semiotisch definieren als Superzeichen, das im Mittelbezug aus beweglichen Farb-Form-Ton-Aggregaten besteht, das im Objektbezug wirkliche oder gedachte Dinge repräsentiert und im Interpretantenbezug eine mehr oder weniger genaue Bedeutung besitzt. Zum Beispiel findet sich in der dritten Einstellung (E_3) des von mir untersuchten Lehrfilms "Der Satz des Pythagoras abbildungsgeometrischer Beweis" folgendes Super-Zeichen:

1. Mittelbezug: Blaues Flächenstück, das von 4 schwarzen, paarweise orthogonalen (anliegend) und paarweise parallelen (gegenüberliegend) Strecken begrenzt wird und das in ein blaues Flächenstück mit vier paarweise gegenüberliegenden parallelen Seiten deformiert wird.

2. Objektbezug: Eine Rechtecksfläche wird durch Scherung in eine Paralellogrammfläche abgebildet, wobei der Flächeninhalt invariant bleibt.

3. Interpretantenbezug: Die dynamische (kinematische) Bildveränderung wird als Scherung der ebenen euklidischen Geometrie interpretiert.

Der didaktische wie der semiotische Aspekt bei der Untersuchung von Lehrfilmen machen es notwendig, die Filme in ihre Bestandteile, d.h. Einzelzeichen zu zerlegen, wenn man hinreichend differenzierte Aussagen machen will. Um dieser Forderung gerecht zu werden, bin ich nicht bei der in der Medientheorie üblichen Zerlegung in Einstellungen (d.h. Filmteile von Schnitt zu Schnitt) stehengeblieben, sondern habe auch die Einstellungen weiter aufgegliedert. Die Methode besteht darin, jede Einstellung so in ihre Bestandteile - und zwar möglichst kleine - zu zerlegen, daß jedem Bestandteil didaktisch-semiotische Bedeutung zugeordnet werden kann. Unter dieser Bedingung ist dann die Zerlegung im wesentlichen[1)] eindeutig bestimmt.



Die Methode führt dazu, daß vielen Bestandteilen keine mathematische Bedeutung zukommt, z.B. dem "hellblauen Untergrund" des untersuchten Pythagoras-Films - ein Bestandteil, der aber sehr wohl didaktisch-semiotische Bedeutung besitzt. Weil die filmischen Bestandteile Bedeutungsträger sind, habe ich sie Semanteme genannt. Nach der eben skizzierten Methode wurde der gesamte drei Minuten dauernde Lehrfilm in 90 Semanteme zerlegt, darunter 37 verschiedene. Mit Hilfe der 10 Peirceschen Zeichenklassen lassen sich die 37 verschiedenen Semanteme semiotisch vollständig klassifizieren.

Name und Nr. der Zeichenklasse	Bsp.eines Semantems aus dieser Klasse	Anzahl d.Repräs./Klasse
Rhematisch-iconisches Qualizeichen (1)	Hypotenusenquadrat rot	7
Rhematisch-iconisches Sinzeichen (2)	Pythagoras-Konfiguration A, B, C	3
Rhematisch-indexikalisches Sinzeichen (3)	Rechtsdrehung des Parallelogramms um 90° in A	12
Dicentisch-indexikalisches Legizeichen (7)	Text(weiß): $a^2 = q.c$	11
Argumantisch-symbolisches(10) Legizeichen	Text (weiß): Der Lehrsatz des Pythagoras lautet: $a^2 + b^2 = c^2$	4
		37

Die Tafel der vollständigen semiotischen Klassifikation spiegelt deutlich die semiotisch-mathematische Struktur des Films:

1. Am häufigsten (12 mal) wurden Semanteme der 3. Zeichenklasse verwendet, nämlich einzelne Bewegungen, die auf die zugrundeliegenden geometrischen Abbildungen (Objektbezug) hinweisen.

2. Fast ebenso häufig (11 mal) wurden Semanteme der 7. Zeichenklasse verwendet, nämlich Texte, die bestimmte Informationen über den zugrundeliegenden mathematischen Sachverhalt (Objektbezug) liefern.

3. Die Semanteme der 1. Zeichenklasse beschreiben im wesentlichen die Farben der einzelnen Teile der Pythagoras-Konfiguration, die der 10. die allgemeinen mathematischen Aussagen, die der 2. die verschiedenen geometrischen Konfigurationen.

II. Nach dieser für alles weitere notwendigen semiotischen Aufbereitung und Analyse möchte ich mich den Kompetenzfragen zuwenden. Da der Beweis des Pythagoras-Satzes im Film vollständig[2] dargestellt wurde, kann Kompetenz (bezogen auf die Mathematik) in erster Näherung "als vollständiges Beherrschen" des Beweises beschrieben werden. Kompetenz im Sinne eines selbständig durchgeführten Beweises oder Teilbeweises des "Pythagoras" scheidet also aus.

Ein "vollständiges Beherrschen" des Beweises impliziert die Kenntnis seiner Beweisschritte samt ihrer Reihenfolge, falls diese eindeutig ist. Die Kenntnis der Reihenfolge der Beweisschritte macht diese andererseits voraussagbar. Unter den angegebenen Bedingungen kann man daher Kompetenz bezüglich des Satzes des Pythagoras als *Fähigkeit zur Voraussage der einzelnen Beweisschritte*(bzw. der zugehörigen Semanteme) erklären.

Die vorläufige Erklärung der Kompetenz bezüglich eines Mathematik-Lehrfilms läßt sich auch auf andere als die überwiegend mathematisch bestimmten Semanteme übertragen, etwa auf die Qualizeichen (hier: Farben) der 1. Zeichenklasse. Da bei allen Zuschauern eine hinreichend lange Erfahrung mit audio-visuellen Medien im allgemeinen und Lehrfilmen (Schule, Werbung) im besonderen vorausgesetzt werden kann, erweisen sich auch solche Semanteme als voraussagbar. Um von einer qualitativen Beschreibung der Lehrfilme-Kompetenz als Fähigkeit zur Voraussage bestimmter Mengen von Semantemen zur wissenschaftstheoretisch überlegeneren quantitativ-exakten Beschreibung zu gelangen, möchte ich den Begriff der *Inkompetenz* einführen.

Ein Zuschauer (Interpret) ist sicherlich inkompetent, wenn er mit dem betreffenden Lehrfilm überhaupt nichts anzufangen weiß, d.h. wenn alle im Film auftretenden Semanteme gleich wahrscheinlich sind.Ein Computer wäre etwa in dieser Lage, wenn er eine bestimmte in Semanteme zerlegte Einstellung "vorauszusagen" hätte, gesetzt den Fall, die entsprechenden Daten wären eingespeichert worden.

Die Situation des inkompetenten Interpreten läßt sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie exakt erfassen: Sei N die Gesamtzahl der verschiedenen Semanteme eines Lehrfilms (im Beispiel ist N = 37) und n die Anzahl der Semanteme einer beliebigen aber fest gewählten Einstellung (im untersuchten Film variiert n zwischen 6 und 12), dann ergeben sich unter der Voraussetzung der Gleichwahrscheinlichkeit (Inkompetenz) die n + 1 Voraussagewahrscheinlichkeiten genau 0 oder 1 oder ... oder i ... oder n Semanteme zu schätzen zu

$$\binom{n}{i} \cdot \binom{N-n}{n-i} \Big/ \binom{N}{n}, \text{ mit } 1 \leqq n \leqq N - n,\ 0 \leqq i \leqq n.$$

Für die zugehörige (spezielle) hypergeometrische Verteilung gilt:

$$\sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{N-n}{n-i} / \binom{N}{n} = 1$$

Die durchschnittliche Anzahl (Mittelwert) E (i) der von einem inkompetenten Interpreten (Computer) in dieser Einstellung richtig geschätzten Semanteme errechnet sich zu

$$E\,(i) = \sum_{i=o}^{n} i \cdot \binom{n}{i} \cdot \binom{N-n}{n-i} / \binom{N}{n}$$

Die i möglichen richtigen Schätzungen (Anzahlen) werden mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichtet. E (i) heißt auch Erwartungswert (der hypergeometrischen Verteilung).

Aus der mathematisch-exakten Beschreibung der Inkompetenz läßt sich direkt die gesuchte quantitativ-exakte Beschreibung der Kompetenz ableiten. Man kann nämlich definieren:

Def.: Ein Interpret I (Zuschauer oder Gruppe von Zuschauern) des (Mathematik-) Lehrfilms L heißt im Mittel kompetent, wenn sein statistischer Voraussage-Mittelwert M signifikant größer ist als der Erwartungswert E (i), andernfalls inkompetent.

Anmerkungen zur Definition: Die Signifikanz wurde im Versuch nach STUDENT's Test zum Vergleich zweier Mittelwerte errechnet (s.u.). Statt "im Mittel kompetent" wird in Zukunft kurz "kompetent" geschrieben.

III. Die relevanten Zuschauergruppen bei Mathematik-Lehrfilmen sind natürlich Lehrer und Schüler allgemeinbildender Schulen. Um den Begriff der Lehrfilm-Kompetenz in der Praxis anzuwenden, habe ich daher als Interpreten einerseits eine Gruppe von 32 Mathematik-Studenten der Pädagogischen Hochschule Esslingen (Stichprobe vom 3. Semester an aufwärts) ausgewählt und zum anderen eine 9. Klasse der Grund- und Hauptschule Deizisau bei Esslingen mit 28 Schülerinnen und Schülern. Die Stichprobe war sicherlich hinreichend umfangreich (es gibt ca. 200 Studierende der Mathematik ab 3. Semester an der PH Esslingen), und in beiden Fällen lassen sich vermutlich die Ergebnisse auf andere Hochschulen bzw. Hauptschulen übertragen.

Durchführung des Filmtests[3)]

Zunächst wurde der im Film gezeigte Beweis des Satzes an der Tafel noch einmal vorgeführt, um die Eigenart, Reihenfolge und mathematische Bedeutung für die einzelnen Beweisschritte im wesentlichen festzulegen - es gibt schließlich viele Möglichkeiten den "Pythagoras" zu beweisen.

Dann wurden den Versuchspersonen (Vpn) von 1 bis 32 bzw. von 1 bis 28 numerierte Listen vorgelegt, auf denen die 37 Semantem-Beschreibungen (im folgenden kurz: Semanteme) *in zufälliger Reihenfolge* notiert waren. Die Semanteme waren 1 bis 37 numeriert. Jede Vpn behielt während des gesamten Tests ihre Liste. Als die Probanden hinlänglich mit der Liste vertraut waren, erhielten sie den 1. Fragebogen, auf dem sie die Nummern derjenigen Semanteme eintragen sollten, die ihrer Meinung nach in der 1. Einstellung (E_1) auftreten würden. Die Anzahl (7) war auf dem Fragebogen notiert. Nach dem Ausfüllen wurden die Fragebogen wieder eingesammelt und dann die erste Einstellung E_1 projiziert. Die Vpn konnten somit kontrollieren, wie richtig sie geschätzt hatten. Anschließend wurde der 2. Fragebogen verteilt, auf dem zusätzlich die 7 Semanteme von E_1 aufgeführt waren, sowie die Anzahl (ebenfalls 7) der Semanteme von E_2. Auf dem 2. Fragebogen notierten die Vpn wieder die Nummern derjenigen Semanteme, die ihrer Meinung nach in E_2 auftreten würden. Nach dem Einsammeln der 2. Fragebögen wurde E_2 projiziert usw. bis zur letzten Einstellung E_{10}.

Auswertung des Tests

Für jede der 10 Einstellungen wird aus dem empirisch errechneten Stichprobenmittel M und dem theoretisch ermittelten Erwartungswert E (i) die Differenz D = M - E (i) gebildet, sowie die "mittlere Streuung" S = S (M, E (i)), S $\neq$ 0 (siehe (3), § 29). Daraus erhält man als Quotienten die Testgröße t = D/S.

Dann gilt nach STUDENT: M ist signifikant größer als E (i) (Fall der Kompetenz), wenn t $<$ a ist, wobei a ein Tabellenwert ist, der vom Umfang der Stichprobe abhängt, sowie der Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanz-Niveau), die man in Kauf zu nehmen bereit ist.

Beispiel:(Tab. 1). Beim Voraussagen der ersten Einstellung E_1 erwiesen sich die Esslinger PH-Studenten als im Mittel kompetent auf dem 0,05 %-Niveau, d.h. wenn man diese Behauptung aufstellt, irrt man sich (durchschnittlich) in 2000 Fällen nur einmal.

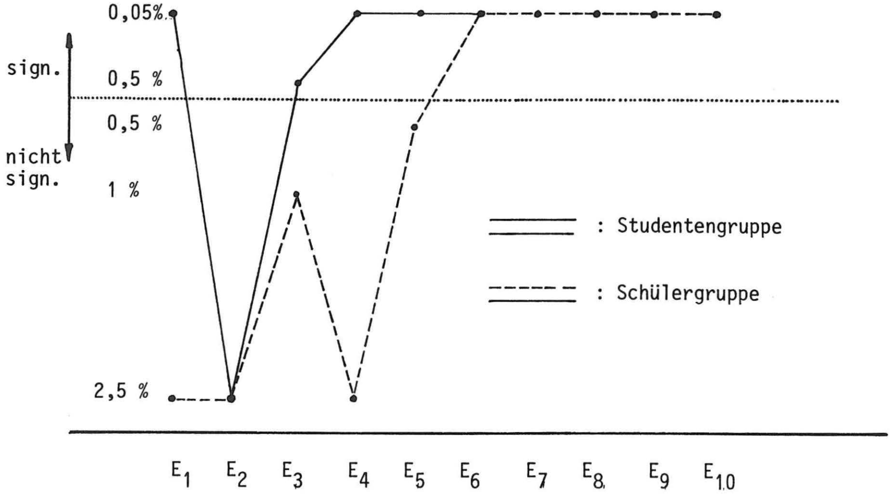
Ergebnisse der beiden Tests über den Lehrfilm "Der Satz des Pythagoras - abbildungsgeometrischer Beweis:

Einstellung Anzahl der Semanteme	Erwartungswert E(i)	Stichprobenmittel M	Testergebn.n. STUDENT
E_1/ 7	1,32	4,91	sig.0,05 % - Niveau
E_2/ 7	1,32	1,81	nicht sign. 2,5% - Niveau
E_3/ 8	1,73	2,66	sig.0,5 % - Niveau
E_4/ 6	0,97	2,78	sig.0,05% - Niveau
E_5/12	3,90	6,00	"
E_6/ 6	0,97	3,80	"
E_7/12	3,90	8,03	"
E_8/ 8	1,73	3,87	"
E_9/12	3,90	8,05	"
E_{10}/12	3,90	5,50	"
90			

Tab. 1: Stichprobe von 32 Mathematik-Studenten ab 3. Semester der Päd. Hochschule Esslingen

Einstellung Anzahl der Semanteme	Erwartungswert E(i)	Stichprobenmittel M	Testergebn. n. STUDENT
E_1/ 7	1,32	1,82	nicht sign. (2,5 % - N.)
E_2/ 7	1,32	1,43	" " (2,5 % - N.)
E_3/ 8	1,73	2,38	" " (1 % - N.)
E_4/ 6	0,97	1,60	" " (2,5 % - N.)
E_5/12	3,90	4,50	" " (0,5 % - N.)
E_6/ 6	0,97	3,02	sign. (0,05 % - N.)
E_7/12	3,90	6,17	" (0,05 % - N.)
E_8/ 8	1,73	3,58	" (0,05 % - N.)
E_9/12	3,90	6,01	" (0,05 % - N.)
E_{10}/12	3,90	5,14	" (0,05 % - N.)
90			

Tab. 2: Klasse von 28 Schülern, 9. Schuljahr, der Grund- und Hauptschule Deizisau bei Esslingen



Veranschaulichung der Ergebnisse (Diagramm)

IV. Interpretation der Ergebnisse

Wie das Diagramm zeigt, erweist sich die Studentengruppe als kompetent in allen Einstellungen bis auf E_2, während die Schülergruppe sich bis E_5 als inkompetent und ab E_6 als kompetent zeigt. Eine genauere Betrachtung unter Berücksichtigung der Niveaus ergibt bei der Schülergruppe ein stufenweises Erreichen der Signifikanz, was vermutlich als ein Lernprozeß verstanden werden kann, der sich während des Tests abgespielt hat (mit einem kleinen "Rückschlag" bei E_3). In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß die Voraussage für diejenigen Vpn erleichtert wurde, die die "invarianten Semanteme" erfaßt hatten, also diejenigen Semanteme, die in fast jeder Einstellung auftreten: Das sind "2. Untergrund hellblau", "5. schwarzes Rechteck", "8. Pythagoras-Konfiguration A, B, C." Eine genaue Auszählung der Einzelantworten ergab, daß im Fall der Kompetenz bei beiden Testgruppen fast immer die invarianten Semanteme (2, 5, 8) vorausgesagt worden waren. Während aus dem Verlauf der "Schülerkurve" im Diagramm mit großer Wahrscheinlichkeit auf einen "natürlichen" Lernprozeß von inkompetenten zu kompetenten Voraussagen geschlossen werden kann, scheint die "plötzliche" Inkompetenz der Studenten E_2 auf totale Unsicherheit der Versuchsgruppe nach der Projektion von E_1 hinzudeuten.

Als in diese Vermutung bei einem Vortrag über meine Untersuchungen auf dem

3. Europäischen Semiotik-Colloquium an der Universität Stuttgart (vom 11.2.-13.2.1977) äußerte, hielt mir einer der Zuhörer in der Diskussion entgegen, daß diese Inkompetenz leicht zu erklären sei, denn entweder müsse nach E_1 der Hilfssatz über die Invarianz des Flächeninhalts bei Scherungen folgen (das ist E_3, P.B.) oder die Erwähnung des Kathetensatzes (das ist tatsächlich E_2). Diese Aussage scheint plausibel, wenn man bedenkt, daß den Studenten kurz zuvor der Satz des Pythagoras an der Tafel bewiesen worden war.

Daraufhin untersuchte ich das aus E_2 und E_3 superierte Semantem, d.h. die mengentheoretische Vereinigung der Elemente von E_2 und E_3 um die Alternative "Hilfssatz" *oder* "Kathetensatz" zu überprüfen (vgl. (1), S. 34).
Man benötigte dazu die allgemeine hypergeometrische Verteilung

$$\sum_{i=o}^{n} \binom{K}{i} \binom{N-K}{K-i} \Big/ \binom{N}{K} = 1$$

wobei K die Anzahl der Elemente von E_2 und E_3 ist (n=K; N, i wie in II).
Ergebnis: Auch in diesem Fall war die Voraussage nicht kompetent.

Ich kann mir dieses Phänomen nur so erklären, daß die Probanden Beweise lediglich als abstrakte Schlußketten kennen, bei denen es auf wenige logische Variable und/oder Operatoren ankommt. In dieser allgemein üblichen Art war auch der Beweis an der Tafel geführt worden. Während des Filmtests waren jedoch wesentlich mehr konkret vorgegebene Semanteme zu erfassen und vorauszusagen - es lag eine völlig andere Situation vor.

Das Phänomen der "isolierten Inkompetenz" wirft zwei Fragen auf:
1.) Ist dieses Phänomen als "natürlich" anzusehen oder wäre eine durchgehende Kompetenz (von E_1 bis E_{10}) der Studentengruppe natürlicher?
2.) Plädiert man für eine durchgehende Kompetenz, wie sollte sie erreicht werden?
Zu 1.): Die Kompetenz der Gruppe ist in allen übrigen Einstellungen so eindeutig, daß man unwillkürlich die Situation bei E_2 als Ausnahmesituation ansieht.

Damit wäre die Beantwortung der 2. Frage gleichbedeutend mit der Verwirklichung der These von Hovland, Lumsdaine und Sheffield vom Anfang dieser Untersuchung: "Dann können die Resultate verwendet werden, um Modifikation und Änderungen des Unterrichtsmittels vorzunehmen."

Mein Vorschlag, den Film aufgrund der Inkompetenz bei E_2 zu modifizieren, besteht darin, zwischen den Einstellungen E_1 und E_2 zwei weitere einzufügen, in denen das rechtwinklige Dreieck ABC einmal in A nach links um 90° gedreht wird und zum anderen in B nach rechts um 90° gedreht wird. Dann bildet einerseits der Hypotenusenabschnitt p den Abstand der Parallelen durch die Quadratecke bei A zur Hypotenuse und andererseits der Hypotenusenabschnitt q den Abstand der Parallelen durch die Quadratecke bei B zur Hypotenuse. Die Strecken p und q repräsentieren somit die Höhen der beiden Parallelogramme, in die die Kathedenquadrate durch Scherung abgebildet werden. Diese Beweislücke zu schließen, bedeutet meiner Meinung nach auch die entsprechende "Semantemlücke" zu schließen und dadurch die Inkompetenz möglicherweise zu beseitigen.

Anmerkungen

(1) *Verschiedene schwarze Rechtecksflächen, in denen kurze Texte den Beweisgang des Satzes erläutern, wurden in einer Klasse "Schwarzes Rechteck" zusammengefaßt.*

(2) *vgl. den Schlußteil dieser Untersuchung*

(3) *An dieser Stelle möchte ich den Teilnehmern eines sechsstündigen Mengenlehrekurses im Rahmen der beruflichen Fortbildung bei der Maschinenfabrik Festo AG in Esslingen danken, die mir wertvolle Hinweise zur Durchführung gaben.*

Literatur

(1) Beckmann, P.: Formale und funktionale Film- und Fernsehanalyse: Diss., Stuttgart 1973

(2) Dallmann, G. u. Preibusch, W.: Erforschung von Unterrichtsmedien: Weinheim/Basel 1974

(3) van der Waerden, B.L.: Mathematische Statistik, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1959

SEMIOSIS 8

Internationale Zeitschrift für
Semiotik und ihre Anwendungen,
Heft 4, 1977.

INHALT