Alfred Toth

Semiotik logischer und metalogischer Paradoxien.*

> Der Deszendenz der Wissenschaften folgt oft die Approximation der Ausdrucksmittel gegen einen Grenzbereich oder Grenzwert, deren Auftreten einen veränderten oder neuen Aspekt der Erkennbarkeit der Welt verrät.
> Max Bense, "Das Universum der Zeichen"

Für Irmgard

0. Als der erste Band seiner "Grundgesetze der Arithmetik" erschien, hatte Frege geschrieben: "Es ist von vornherein unwahrscheinlich, daß ein solcher Bau sich auf einem unsichern, fehlerhaften Grunde aufführen lassen sollte [...]. Und nur das würde ich als Widerlegung anerkennen können, wenn jemand durch die That zeigte, dass auf andern Grundüberzeugungen ein besseres, haltbareres Gebäude errichtet werden könnte, oder wenn mir jemand nachwiese, dass meine Grundsätze zu offenbar falschen Folgesätzen führten. Aber das wird Keinem gelingen" (Frege 1893: xxvi).

In einem Brief vom 16.06.1902 teilte dann der dreißigjährige Russell Frege mit, daß sich innerhalb von dessen formalem System eine Paradoxie konstruieren läßt, die ebenso Freges wie Dedekinds Entwicklung der Mengenlehre aus der Logik erschütterte (Frege 1976: 211f). Frege antwortete mit Schreiben vom 22.06.1902 (Frege 1976: 212ff) und fügte dem zweiten Band seiner "Arithmetik", der gerade in Druck gegangen war, einen Anhang bei, in dem er bekannte: "Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als dass ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird. In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte" (Frege 1903: 253).

Im Zentrum der vorliegenden Arbeit stehen die Paradoxien des Epimenides, von Russell und von Grelling und Nelson. Die semiotische Relevanz logischer Begriffe

* Referat, gehalten an der Jahrestagung der Vereinigung für Wissenschaftliche Semiotik (VWS) e.V. zu Ehren von Frau Prof.Dr. Elisabeth Walther-Bense am 16.10.1992 an der Universität Stuttgart.

wie Autonymie und Heteronymie, Autologie und Heterologie sowie Ipsoflexivität wird aufgewiesen. Es werden erste Hinweise zu einer semiotischen Begründung der Typen- und Stufenlogik auf der Basis hierarchischer semiotischer Systeme gegeben.

1.1. Zunächst sollen die semiotischen Grundlagen einiger logischer Begriffe geklärt werden. Eine Aussage heißt widerspruchsvoll, wenn sie als "Konjunktion einer Aussage mit einer ihr isomorphen verneinten Aussage oder einem äquivalenten Ausdruck" darstellbar ist (Bochenski und Menne 1983: 88). Eine Menge von Ausdrücken Φ heißt widerspruchsvoll genau dann, "wenn es einen Ausdruck ϕ gibt mit $\Phi \vdash \neg \phi$" (Ebbinghaus, Flum und Thomas 1986: 98).

Bense hat darauf hingewiesen, daß mit der logischen Ableitbarkeit eine semiotische Ableitbarkeit korrespondiert: darunter versteht er "einen semiosischen (involvativ-selektiven) und retrosemiosischen (replikativselektiven) Übergang zum Subzeichen höherer oder niederer Semiotizität innerhalb der vollständigen Zeichenklasse" (1979: 117f).

1.2. Carnap hat zwischen "formaler" und "inhaltlicher" Redeweise unterschieden: "Die inhaltliche Redeweise ist eine verschobene Redeweise. Denn bei ihrer Anwendung sagt man, um etwas über ein Wort (oder einen Satz) auszusagen, stattdessen etwas Paralleles über den durch das Wort bezeichneten Gegenstand (bzw. über den durch den Satz angegebenen Sachverhalt) aus". Zur Begründung gibt er u.a. an: "Die Vorstellung eines Wortes (z.B. 'Haus') ist häufig weniger lebhaft und gefühlsbetont, als die des Gegenstandes, den das Wort bezeichnet (im Beispiel: die des Hauses)" (1968: 236).

Carnap (1968: 224) gibt u.a. folgendes Beispiel für inhaltliche (1) und für formale (2) Redeweise:

(1) Fünf ist kein Ding, sondern eine Zahl.

(2) 'Fünf' ist kein Dingwort, sondern ein Zahlwort.

In (1) steht das Zeichen "fünf" in formaler Supposition für das Zahlobjekt "fünf", d.h. "fünf" bezeichnet etwas, das von "fünf" und allen mit "fünf" isomorphen Ausdrücken verschieden ist (vgl. Bochenski und Menne 1983: 23). Bei der inhaltlichen

Redeweise ist der Unterschied zwischen Zeichen und Objekt (OBJ) faktisch aufgehoben:

(3) $M(O) = OBJ$

In (2) steht "'fünf'" in materialer Supposition, denn das Zeichen bezeichnet nicht das Zahlobjekt "fünf", sondern das Zeichen "fünf" (vgl. Bochenski und Menne 1983: 23). Die formale Redeweise zeichnet sich im Gegensatz zur inhaltlichen also dadurch aus, daß zwischen Zeichen und Metazeichen streng unterschieden wird:

(4) $M(M(O)) \neq M(O)$, d.h. $M(O) \neq OBJ$

Das Zeichen "fünf" besitzt mit dem Objekt, das es bezeichnet, keinerlei Übereinstimmungsmerkmale; semiotisch ist die Bezeichnungsfunktion M(O) daher als Symbol (2.3) zu deuten (vgl. Walther 1979: 66).

Das hier angeschnittene Problem von Zahlzeichen und Zahlobjekt wurde übrigens bereits von Leibniz formuliert: "Welche Ähnlichkeit aber besteht wohl zwischen der Zehnzahl und dem Zeichen 10?" (Leibniz ap. Becker 1990: 357).

Eine weitere Frage lautet: Welche Ähnlichkeit besteht zwischen dem Metazeichen "'fünf'" und dem Zeichen "fünf"? Zu diesem Problem notierte Frege: "[...] Wir haben dann Zeichen von Zeichen. In der Schrift schließt man in diesem Falle die Wortbilder in Anführungszeichen ein. Es darf also ein in Anführungszeichen stehendes Wortbild nicht in der gewöhnlichen Bedeutung genommen werden" (1986: 43).

1.3. Carnap hat ferner auf die Möglichkeit hingewiesen, "als Namen für ein Ding das Ding selbst zu wählen oder als Bezeichnung für eine Dingart die Dinge dieser Art. Wir können z.B. festsetzen, daß an Stelle des Wortes 'Streichholz' jeweils ein Streichholz auf das Papier gelegt werden soll" (1968: 109).

Carnap übersieht aber, daß im letzten Falle das Streichholz, indem es sich selbst repräsentiert, durch den Akt der Bezeichnung in ein Metaobjekt und also nach Bense (1967: 9) in ein repräsentierendes Zeichen transformiert wird. Somit liegt hier ein Spezialfall des allgemeinen semiotischen Prinzips: "Zeichen ist alles, was zum Zeichen erklärt wird und nur, was zum Zeichen erklärt wird" (Bense 1967: 9) vor.

Nun besagt die Darstellungsweise des determinantensymmetrischen Dualitätssystems, daß die eigenreale Zeichenklasse die übrigen neun Zeichenklassen mit ihren Realitätsthematiken semiotisch determiniert (Walther 1982: 16). Offenbar läßt sich Benses Grundprinzip damit auf ein allgemeineres semiotisches Prinzip zurückführen:

(5) Jedes beliebige Objekt kann zum Metaobjekt, d.h. zum Zeichen für etwas erklärt werden. Als solches repräsentiert es zunächst sich selbst in seiner Eigenrealität. Da die eigenreale Zeichenklasse mit allen übrigen Zeichenklassen semiosisch zusammenhängt, kann es ferner auch jedes "fremdreale"[1] Objekt semiotisch repräsentieren.

1.4. Carnap nennt nun ein Zeichen, das als "Name für sich selbst (genauer: für seine eigene Gestalt)" auftritt, autonym" (1968: 16). Im folgenden Beispiel (Carnap 1968: 109) erscheint der Ausdruck "a+3" zuerst autonym, d.h., er repräsentiert sich selbst als Metazeichen und steht somit in materialer Supposition, und dann heteronym d.h., er steht in formaler Supposition für die Zahl "a+3":

(6) Wir setzen a+3 für x ein; wenn a+3 eine Primzahl ist ...

Da der Begriff der "Eigenrealität" nach Bense (1986) für die dualinvariante Zeichenklasse und somit für Zeichen, nicht aber für Metazeichen definiert ist, können wir als Bezeichnung, die auch die autonymen Metazeichen mitumfaßt, die der "Eigenrepräsentativität" vorschlagen. Für die nicht-selbstrepräsentierenden Fälle schlage ich auf der Ebene der Zeichen "Fremdrealität" und als allgemeineren Begriff, der auch die heteronymen Fälle umfaßt, den der "Fremdrepräsentativität" vor.

Wir erhalten damit folgende erste Übersicht über die repräsentativen semiotischen Verhältnisse logischer Ausdrücke auf der Ebene der Zeichen und der Meta-Zeichen:

(7)

	Eigenrepräsentation	Fremdrepräsentation
Metazeichen	Autonymie	Heteronymie
Zeichen	Eigenrealität	Fremdrealität

[1] Dieser Begriff wird weiter unten eingeführt.

2.1. Das Peircesche Zeichen wurde von Bense als "triadische Relation über Relationen" eingeführt (1979: 53). Da die Voraussetzung der Rechtseindeutigkeit der Relationen jeweils erfüllt ist (vgl. Erné 1982: 13), kann das Peircesche Zeichen als Funktion aufgefaßt werden, die, "eingeführt als semiotische Operation, die Zeichen verknüpft, das generierend graduierende Abhängigkeitsverhältnis der Semiotizitäten der Subzeichen in den Semiosen" regelt (Bense 1975: 15f).

2.2. Ich schlage nun vor, auf der Ebene der Metazeichen in M(M(O)) einen semiotischen Funktor M von einem komplexen semiotischen Argument M(O) zu unterscheiden. Ich nenne ihn verkürzend "M-Funktor" und stelle ihn dem "R-Funktor" gegenüber, der die Bezeichnungsfunktion M(O) auf der Ebene der Zeichen schafft. Im Rahmen der vollständigen Zeichenrelation lassen sich dann die von Bense (1975: 41) eingeführte Bedeutungsfunktion als M(O(I)) und die von Bense (1975: 112) eingeführte Gebrauchsfunktion des Zeichens als I(O(M)) auffassen.

Dem M-Funktor entspricht auf der Ebene der Logik der Anführungszeichen-Funktor, der aus Ausdrücken Namen für diese Ausdrücke bildet (vgl. Bochenski und Menne 1983: 24):

(8) Sein ewiges "ich weiss nicht, was ich tun soll" geht mir auf den Geist.

Der durch Anführungsstriche markierte logische Name eines vollständigen Satzes ist ein Metadicent M(3.2) im semiotischen Sinne, der M-Funktor bewirkt aber in allen möglichen Fällen eine Superisation, indem er Zeichen zu "Zeichengestalten" zusammenfaßt (Bense 1967: 10). Das aus dieser semiotischen Operation jeweils resultierende Superzeichen "stellt hinsichtlich der vorgegebenen Zeichen stets ein Zeichen höherer Stufe dar" (Walther ap. Bense und Walther 1973: 107).

Da der M-Funktor somit Konnexe, d.h. Interpretantenbezüge bildet, setzt er die vollständige triadische Zeichenrelation (9) und nicht nur die dyadische Teilrelation M(O) in (3) voraus:

(9) ZR = (M, O, I)

Es ist jedoch zu beachten, daß eine Zeichenrelation, auf die zweimal nacheinander der M-Funktor angewandt wurde, vom ursprünglichen Zeichen qualitativ verschieden ist. Während also auf der Ebene der Zeichen die Konverse einer Konversen einer

Relation, hier also $(ZR^{-1})^{-1}$, wieder zur Ausgangsrelation ZR zurückführt (vgl. Erné 1982: 11), läßt sich auf der Ebene der Metazeichen, Metametazeichen usw. eine prinzipiell infinite semiotische Hierarchie als Analogon zur Typenlogik konstruieren, wie sie Whitehead und Russell (1990: 70ff) skizziert haben:

(10) ...		...
	M(M(M(M(M(O)))))	5
	M(M(M(M(O))))	4
	M(M(M(O)))	3
	M(M(O))	2
	M(O)	1

Da bereits der M-Funktor semiotisch drittheitlich fungierende Konnexe, d.h. Superzeichen bildet, setzen alle Zeichengestalten von Stufe 2 an ein triadisches Zeichenschema der Art (9) voraus. Denn die zeichenexterne Superisation "setzt jeweils elementare Zeichen des Repertoires zu einem komplexen Zeichen derart zusammen, daß wie die elementaren Zeichen auch das komplexe Zeichen als triadische Relation aufzufassen ist" (Bense 1975: 54).

Das bedeutet jedoch, daß eine auf einem dyadischen Zeichenbegriff operierende Logik aus prinzipiellen Gründen zur Thematisierung stufen- und typenlogischer Verhältnisse nicht mehr ausreicht.

3.1. Paradoxien bzw. Antinomien sind Widersprüche, "die aus augenscheinlich einsichtigen Axiomen kraft richtiger Schlussregeln deduziert" werden (Bochenski und Menne 1983: 88); sie lassen sich in logische (mathematische) und in metalogische (semantische) einteilen: "Roughly speaking, the first class arises from purely mathematical constructions; the second from direct consideration of the language which we use to talk about mathematics and logic" (Suppes 1972: 8f).

Die metalogische Paradoxie des Epimenides ist ein einfaches Beispiel dafür, wie durch Nichtunterscheidung logisch-semiotischer Stufen, wie sie in (10) skizziert wurden, Widersprüche auftreten, sobald Ausdrücke der Form "X ist falsch" in logische Systeme eingeführt werden.

Bochenski und Menne (1983: 93) geben folgende Ableitung der Paradoxie:

> Man bilde die Aussage "c ist falsch" und nehme "c" als Abkürzung für diese Aussage. Man erhält also:
>
> (11) c ist falsch = df c
>
> Andererseits gilt, gemäß der geläufigen Definition für die Wahrheit einer Aussage:
>
> (12) X ist wahr . ≡ . X
>
> Durch die Einsetzung von "c ist falsch" für X in (12) erhält man:
>
> (13) c ist falsch ist wahr .≡ . c ist falsch
>
> Ersetzt man auf Grund der Definition (11) "c ist falsch" durch "c" in (13), so erhält man:
>
> (14) c ist wahr . ≡ . c ist falsch
>
> Macht man für (14) Gebrauch von der Definition für die Falschheit:
>
> (15) c ist falsch =df ¬ . c ist wahr,
>
> so erhält man die Paradoxie:
>
> (16) c ist wahr : ≡ : ¬ . c ist wahr.

Beachtet man dagegen die Regel der materialen Supposition,
so erhält man statt (11):

(17) "c" ist falsch = df c

und statt (12):

(18) "X" ist wahr . ≡ . X.

Eine logische Ableitung der Paradoxie ist also nicht mehr möglich. In unserem semiotischen Analogon blockiert der dicentische M-Funktor M(3.2) die entsprechende semiotische Ableitung:

$$\text{(19)}\quad \underbrace{\text{"c ist falsch"}}_{M(3.2)}\ \underbrace{\text{ist wahr}}_{R(3.1)}\ .\equiv.\quad \underbrace{\text{c ist falsch}}_{R(3.2)}$$

wogegen die inkorrekte Ableitung gleichstufige Zeichenfunktoren voraussetzt:

(20) $$\underbrace{\text{c ist falsch}}_{R(3.2)}\quad \underbrace{\text{ist wahr}}_{R(3.1)}\ .\equiv.\ \underbrace{\text{c ist falsch}}_{R(3.2)}$$

$$\underbrace{\underbrace{\text{c}}_{}\quad \text{ist wahr}}_{R(3.2)}\ .\equiv.\ \underbrace{\text{c ist falsch}}_{R(3.2)}$$

Bochenski und Menne behaupten nun, daß die Erklärung mittels Verwechslung der Suppositionsregeln sich nur auf metalogische, nicht jedoch auf logische Paradoxien anwenden ließe, denn eine logische Paradoxie sei eben eine, "die sich auch dann ergibt, wenn die Suppositionsregeln genau beachtet werden" (1983: 88).

Führt man jedoch die grobrastrige Unterscheidung von Objekt- und Metasprache (vgl. Tarski 1986b) bzw. Syntaxsprache (vgl. Carnap 1968) auf eine semiotische Stufenhierarchie von R- und M-Funktionen zurück, so lassen sich, wie sogleich gezeigt wird, auch logische Paradoxien mit Hilfe dieses Modells erklären.

3.2. Als Beispiel für eine logische Paradoxie stehe diejenige von Russell: "Bildet man die Klasse aller Klassen, die sich nicht selbst enthalten, und stellt die Frage, ob eine solche Klasse sich selbst enthält, so würde die Bejahung dieser Frage implizieren, dass sie sich dann nicht selbst enthält, die Verneinung, dass sie sich dann selbst enthält" (Bochenski und Menne 1983: 89):

(21) $\alpha \in \beta . \equiv . \, . \alpha \in \alpha$

Durch Einsetzung von "ß" für "α" erhält man:

(22) $\beta \in \beta . \equiv . \neg . \beta \in \beta$

und daraus:

(23) $\beta \in \beta . \neg . \beta \in \beta$.

Um (21) zu erhalten, muß die Zugehörigkeit von Objekten zu einer Klasse (Menge) im Sinne einer Eigenschaft aufgefaßt werden. Das entsprechende "Abstraktionsaxiom" hat nach Suppes (1972: 6), dessen Notationsweise ich mich nun anschließe, folgende Form:

$$(24) \quad (\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow \phi(x))$$

Da die Elementschaftsrelation, darin von der Inklusionsbeziehung verschieden, nicht reflexiv ist, kann man für ϕ (x) den Ausdruck $\neg$ (x $\equiv$ x) einsetzen; man erhält somit:

$$(25) \quad (\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow \neg (x \in x))$$

Setzt man y für x ein, so bekommt man:

$$(26) \quad y \in y \leftrightarrow \neg (y \in y),$$

was logisch äquivalent ist zum Widerspruch p & $\neg$ p. Den Übergang von (25) zu (26) könnte man verhindern, indem man, wie dies Zermelo (1908) tat, anstelle des naiven Existenzaxioms (24) ein "Aussonderungsaxiom" ansetzt:

$$(27) \quad (\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow x \in z \,\&\, \phi(x))$$

Dieses besagt: Ist eine Aussage ϕ (x) definit für alle Elemente einer Menge y, so besitzt y immer eine Untermenge z, welche alle diejenigen Elemente x von y, für welche ϕ (x) wahr ist, und nur solche als Elemente enthält (vgl. Zermelo 1908: 263).

Zermelos Verfahren verhindert nun zwar "widerspruchsvolle Gebilde wie 'die Menge aller Mengen' oder 'die Menge aller Ordinalzahlen', indem "niemals Mengen independent definiert, sondern immer nur als Untermengen aus bereits gegebenen ausgesondert werden" (Zermelo 1908: 264), aber es operiert unabhängig von den logischen und damit auch von deren semiotischen Grundlagen.

Russell selbst hat versucht, die Entstehung der von ihm entdeckten Paradoxie mittels einer Typentheorie zu unterbinden (Russell 1908). Er stellte fest: "Eine Analyse der zu vermeidenden Paradoxien zeigt, daß sie alle aus einem gewissen fehlerhaften Zirkel entspringen. Dieser fehlerhafte Zirkel entsteht aus der Annahme, eine Menge von Gegenständen könne Elemente enthalten, die nur vermittels der Menge als ganzer definiert werden können" (Russell und Whitehead 1990: 55).

Er nimmt an, "daß eine Aussage über eine Klasse immer zu reduzieren ist auf eine Behauptung über eine logische Funktion, die die Klasse definiert; d.h. über eine Funktion, die durch die Glieder der Klasse befriedigt wird, aber sonst durch keine

Argumente. So ist eine Klasse ein Objekt, das von einer logischen Funktion abgeleitet ist und die Funktion voraussetzt [...]. Daher kann eine Klasse nach dem Circulus-vitiosus-Prinzip niemals Argument der sie definierenden Funktion sein [...]. Deshalb befriedigt eine Klasse weder die sie definierende Funktion, noch befriedigt sie sie nicht, und darum ist sie weder ein Glied ihrer selbst noch nicht ein Glied ihrer selbst" (Russell ap. Becker 1990: 326).

Die syntaktische Typentheorie verlangt: Falls F ein Funktor ist von X und X zum Typus n gehört, so gehört F zum Typus n+1 (Bochenski und Menne 1983: 90), die Unterscheidung der semiotischen Typen, wie sie in (10) gegeben wurde, impliziert dagegen schon aufgrund der thetischen Einführung des Zeichens: falls der R-Funktor vom Typ n ist, so muß der M-Funktor wegen des superativen Konnexes der Zeichengestalten vom Typ n+1 sein.

Werden die Unterscheidungen der logischen und der semiotischen Typentheorie nicht beachtet, so haben wir reflexive Strukturen vor uns. Solche entstehen also etwa bei den Stufen 1 und 2 in (10) immer dann, wenn ein Objekt, auf das die Elementschaftsrelation zutrifft, der gleichen logischen und semiotischen Ebene angehört wie die Menge der Objekte, welche diese Relation erfüllen.

Iterative Begriffsbildungen wie die "Menge aller Mengen" setzen jedoch Zeichen, nicht Objekte voraus, wie Max Bense einmal bemerkte, denn nur Zeichen können iteriert bzw. zu Superzeichen superiert werden, und alle Objekte, die in einem reflexiven Verhältnis zu sich (selbst) stehen, können dies nur, indem sie als Zeichen sich selbst in ihrer Eigenrepräsentation thematisieren.

Strategien zur Vermeidung reflexiver Strukturen weisen aber nicht nur künstliche, sondern auch natürliche Sprachen auf. Wie im Deutschen, so ist der Satz "Sie sitzt auf ihrem Bett" auch im Dänischen ambig, je nachdem, ob die Frau auf ihrem eigenen Bett (28i) oder dem einer anderen Frau (28ii) sitzt:

(28)	(i)	Hun Subjekt	sidder på <u>sin</u> seng.
	(ii)	Hun Subjekt	sidder på <u>hendes</u> seng.

Sage ich jedoch von der Frau: "Ihr Kleid ist rot" (29i), so kann sich das Pronomen nicht auf das Subjekt des Satzes beziehen, da es selbst Teil des Subjekts ist. Dasselbe gilt für: "Die Dame und ihr Sohn gingen zusammen nach Hause" (29ii). Um hier ein grammatisches "Zirkelfehlerprinzip" zu verhindern, wird im Dänischen das zu erwartende Reflexivum blockiert:

(29) (i) <u>Hendes</u> kjole er rød.
Subjekt

(ii) Damen og <u>hendes</u> søn gik sammen hjem.
Subjekt

3.3. Von besonderer Bedeutung für die Logik wie für die Rolle, welche die Semiotik zu ihrer Grundlegung spielt, ist schließlich die (metalogische) Paradoxie von Grelling und Nelson (1908). Ihre Behandlung erfordert, im Anschluß an unsere Vorbemerkungen auf die semiotische Relevanz einiger weiterer Begriffe der logischen Zeichentheorie einzugehen.

Unter einem "ipsoflexiven" Ausdruck verstehen Bochenski und Menne einen Ausdruck X, der sich "auf sich selbst" bezieht (1983: 92). In (30i) liegt nach Bochenski und Menne ein ipsoflexiver Satz, in (30ii) ein ipsoflexives Prädikat vor:

(30) (i) Dieser Satz hat fünf Wörter.

(ii) "abstrakt"

Der Ausdruck "dieser Satz" bezieht sich auf einen Satz, von dem er selbst einen Teil darstellt; er nimmt sich, als Funktor aufgefaßt, den ganzen Satz zum Argument. Die reflexive Struktur von (30i) ist also mit den dänischen Beispielen in (29) vergleichbar.

Da sich "dieser Satz" auf nichts anderes als auf den ganzen Satz beziehen kann, enthält er keinerlei "daseinsrelative" Momente (Bense 1988). Daß Anführungszeichen hier ausgeschlossen sind, zeigt ferner, daß (30i) auf der Ebene der Zeichen operiert und ipsoflexive logische Ausdrücke semiotisch daher als eigenreal aufzufassen sind.

In (30ii) liegt dagegen ein "autologisches" Prädikat vor. Ein Prädikat heißt autologisch, wenn es auf sich selbst zutrifft, und heterologisch, wenn es nicht auf sich selbst zutrifft (Wall 1973: 142). Da Prädikate der Form (30ii) leicht zu Sätzen ergänzbar sind, kann man auch sagen, ein Prädikat sei heterologisch, "if the sentence ascribing to the predicate the property expressed by the predicate is false" (Suppes 1972: 10).

In (31i) liegt wiederum ein autologisches, in (31ii) und (31iii) liegen heterologische Prädikate vor:

(31) (i) (Das Prädikat) "kurz" (ist kurz)

(ii) (Das Prädikat) "rot" (ist rot)

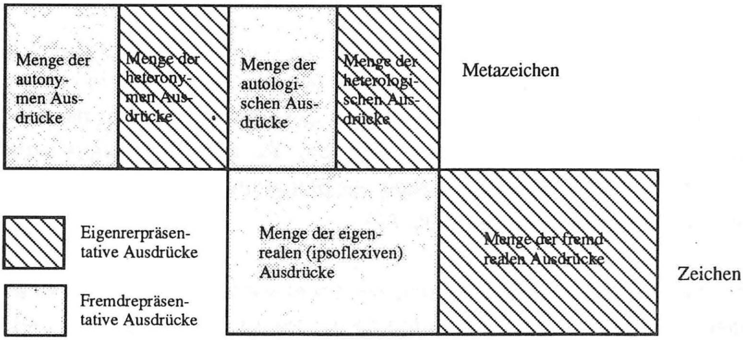
(iii) (Das Prädikat) "englisch" (ist englisch)

Sätze mit autologischen Prädikaten unterscheiden sich von Tautologien wie etwa "rot ist rot", indem nicht die Objekte, die rot sind, sondern die Zeichen, auf welche die durch das Prädikat bezeichnete Eigenschaft zutrifft, die Extension des Prädikates bestimmen.

Daß in (31) die Anführungszeichen obligatorisch sind, zeigt, daß autologische Prädikate im Gegensatz zu ipsoflexiven Ausdrücken semiotisch als Metazeichen und nicht als eigenreal, sondern bloß als eigenrepräsentativ aufgefaßt werden müssen. Die von Bochenski und Menne auf logischer Ebene zusammen aufgeführten Beispiele müssen also auf semiotischer Ebene getrennt behandelt werden.

In Erweiterung von Tabelle (7) und in Anlehnung an (10) erhalten wir nun eine in vier Teilmengen untergliederte Menge von Metazeichen (der semiotischen Stufe 2) und eine in zwei Teilmengen untergliederte Menge von Zeichen (der semiotischen Stufe 1). Autonyme und autologische Ausdrücke sind über die Stufenunterscheidungen hinweg als Spielarten von Eigenrepräsentativität, heteronyme und heterologische als solche von Fremdrealität aufzufaßen:

(32)



4.1. Im Anschluß an Walther (1979: 56) können wir an Eigenschaften von Zeichen, welche die Extensionen von Prädikaten bestimmen, Repertoire-Eigenschaften im Mittelbezug, Bereichs-Eigenschaften im Objektbezug und Feldeigenschaften im Interpretantenbezug unterscheiden.

Stellt man die Frage, ob das Prädikat "rot" rot sei, so läßt sie sich einfach dadurch beantworten, daß man im Mittelrepertoire nachschaut, ob der fragliche Ausdruck zur Untermenge der roten oder nichtroten Prädikate gehört.

Ähnlich läßt sich die Frage, ob das Prädikat "abstrakt" abstrakt sei oder nicht, dadurch beantworten, daß man als Objektbereich des Zeichens die Untermenge der abstrakten oder konkreten Ausdrücke bestimmt.

Fragt man sich hingegen, ob "heterologisch" heterologisch oder autologisch sei, so ergibt sich die von Grelling und Nelson entdeckte Paradoxie: Nimmt man an, "heterologisch" sei heterologisch, so trifft das Prädikat auf sich selbst zu - es ist somit autologisch. Nimmt man aber an, "heterologisch" sei autologisch, so trifft es nicht auf sich selbst zu - es ist also heterologisch.

Solange also durch Prädikate definierte Eigenschaften Mittel-Repertoires oder auch Objekt-Bereiche betreffen, ist die Frage, ob das betreffende Prädikat auf sich selbst zutrifft, in einem endlichen Prozeß entscheidbar, sobald aber Interpretanten-Felder involviert sind, führt das der Stufenhierarchie (10) zugrunde liegende semiotische

Prinzip, "daß die Erklärung den ersten Interpretanten in ein zweites Mittel verwandelt, das seinerseits interpretiert wird, usw." (Walther 1979: 76) zu einem unendlichen iterativen Regress von Superzeichen.

4.2. Schon Russell hat vermutet, daß dieser Typ von Paradoxien in irgendwelcher Weise mit der Verwendung von Definitionen zusammenhängt: "In den Fällen der Namen und Definitionen ergeben sich die Paradoxien daraus, daß man Unbenennbarkeit und Undefinierbarkeit als Elemente in Namen und Definitionen auffaßt" (Whitehead und Russell 1990: 89).

Da uns die Russellsche Bestimmung nicht viel weiterhilft, soll hier eine exakte semiotische Begründung für das Auftreten der Paradoxie von Grelling und Nelson versucht werden. Wie bereits gesagt, setzt die Definition von "heterologisch" die vollständige triadische Zeichenrelation voraus:

(33) "heterologisch" $=_{def}$ Eigenschaft von Prädikaten, auf sich selbst nicht zuzutreffen

Ihr Definiens enthält aber als Teil von sich selbst zugleich das Definiens des Definiendums "autologisch":

(34) "autologisch" $=_{def}$ Eigenschaft von Prädikaten, auf sich selbst zuzutreffen

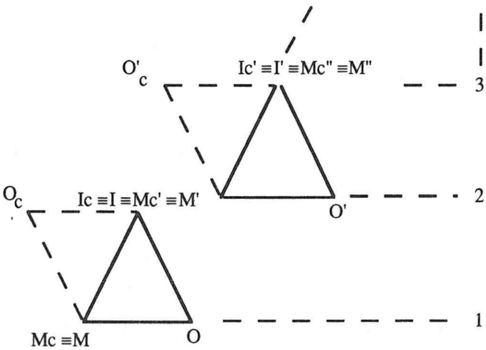
(33) enthält jedoch außerdem die Negation, die sozusagen die "Schaltstelle" darstellt (vgl. Flechtner 1984: 221), an der entschieden wird, ob ein Ausdruck in die Menge der heterologischen oder in die zu ihr komplementäre Menge der autologischen Prädikate verwiesen wird.

Geht man hingegen von der Definition von "autologisch" aus, so führt die Frage, ob "autologisch" autologisch oder heterologisch sei, deshalb zu keinem Widerspruch, weil das Definiens von "autologisch" die Negation nicht enthält, so daß der Ausdruck "autologisch" zur Menge der autologischen und der Ausdruck "heterologisch" wegen der Binarität der Schaltung zur Menge der heterologischen Prädikate geschlagen wird.

Die Rolle der Negation bedingt semiotisch eine zur ursprünglichen Zeichenrelation ZR komplementäre Zeichenrelation ZR_C, denn "in der Semiotik wird jedes als Negat einführbare Zeichenkorrelat eines eingeführten Zeichens als Komplement des Repertoires, aus dem es selektiert wurde, verstanden" (Bense 1979: 93).

Eine vollständige semiotische Thematisierung der Paradoxie von Grelling und Nelson erfordert also zusätzlich zu dem bereits von Walther (1969: 4) hervorgehobenen "Wachstum" von Zeichen, womit wiederum die iterative Hierarchie von Superzeichenkonnexen (10) gemeint ist, eine Hierarchie von komplementären Zeichen, deren erste Stufen man wie folgt schematisieren könnte:

(35)



Die ausgezogene Zeichenrelation ZR der Stufe 1 repräsentiere die Menge der autologischen, die gestrichelte Zeichenrelation ZR_C der gleichen Stufe die Menge der heterologischen Prädikate.

Nimmt man an, "heterologisch" sei heterologisch, so müßte der durch ($I_C \equiv M_C'$) gegebene Zusammenhang ZR_C 1 mit ZR_C 2 verbinden; weil aber das Definiens von "heterologisch" zugleich dasjenige von "autologisch" enthält, stellt sich auch der Zusammenhang ($I_C \equiv M'$) von ZR_C 1 mit ZR 2 ein. Geht man umgekehrt davon aus, "heterologisch" sei autologisch, so müßte der Zusammenhang ($I_C \int M'$) ZR_C 1 mit ZR 2 verbinden; allein, da "autologisch" das Negat von "heterologisch" bedeutet, ist über den Zusammenhang ($I_C \int M_C'$) auch ZR_C 2 in den Definitionsprozeß involviert.

5.1. Tarski (1986b) hat als Ursache der Paradoxie des Lügners die Inkonsistenz "semantisch geschlossener" Sprachen bestimmt. Nach Tarski sind es die drei folgenden Annahmen, die erfüllt sein müssen, damit eine logische Ableitung in einer Paradoxie gipfelt:

(36) We have implicitly assumed that the language in which the antinomy is constructed contains, in addition to its expressions, also the names of these expressions, as well as semantic terms such as the term "true" referring to sentences of this language; we have also assumed that all sentences which determine the adequate usage of this term can be asserted in the language. A language with these properties will be called "semantically closed".

(37) We have assumed that in this language the ordinary laws of logic hold.

(38) We have assumed that we can formulate and assert in our language an empirical premise such as the statement (2)[2] which has occurred in our argument.
(Tarski 1986b: 672)

Paradoxien können also vermieden werden, indem man festsetzt, "not to use any language which is semantically closed in the sense given" (Tarski 1986b: 673).

Da aber auch natürliche Sprachen die Annahmen (36) und (37) erfüllen, müßten sie selbst inkonsistent sein: "Our everyday language is certainly not one with an exactly 4specified structure. We do not know precisely which expressions are sentences, and we know even to a smaller degree which sentences are to be taken as assertible. Thus the problem of consistency has no exact meaning with respect to this language. We may at best only risk the guess that a language whose structure has been exactly specified and which resembles our everyday language as closely as possible would be inconsistent" (Tarski 1986b: 673).

Paradoxien werden also nach Tarski sowohl in künstlichen wie in natürlichen Sprachen vorbereitet durch die "Relativität" der Begriffe Objektsprache und Metasprache (1986b: 674) sowie durch die eben erwähnte "essential richness" von Metasprachen (1986b: 675).

Für die Umgangssprache konstatierte Tarski einen "Universalismus [...] im Gebiete der Semantik, [der] die wesentliche Quelle aller sog. semantischen Antinomien" sei: "Diese Antinomien scheinen einfach ein Beweis dafür zu sein, dass sich auf dem Boden jeder Sprache, welche im obigen Sinne universal wäre und für welche die normalen Gesetze der Logik gelten sollten, ein Widerspruch ergeben muss" (1986a: 71).

2 "s" is identical with the sentence printed in this paper on p. 347, l. 31 (Tarski 1986b: 671).

5.2. Unsere Untersuchung legt jedoch den Schluß nahe, daß nicht nur das Russellsche Zirkelfehlerprinzip, sondern auch das von Tarski ausgesprochene Verbot semantisch geschlossener Sprachen eine Oberflächenkorrektur darstellt.

Inkonsistenz und Zirkelhaftigkeit von Sprachen sowie die mit ihnen zusammenhängenden logischen und metalogischen Paradoxien betreffen primär die semiotische, nicht die metasemiotische Ebene, da die stufen- und typenlogischen Strukturen bereits aus der Definition bzw. der thetischen Einführung des Zeichens als triadischer Relation resultieren.

Gerade weil die menschliche Sprache und insbesondere die Umgangssprache nach Peirce das am höchsten entwickelte metasemiotische System ist (Walther 1985: 46), lassen sich in ihr zahlreiche "universalistische" Erscheinungen finden, welche in Wirklichkeit Projektionen der semiotischen Basisstruktur sind.

Falls unsere These korrekt ist, daß paradoxale Strukturen bereits auf semiotischer Ebene vorgegeben sind, müßten sie sich auch in nonverbalen, etwa in visuellen metasemiotischen Systemen finden lassen. Da im Rahmen dieser Arbeit nicht darauf eingegangen werden kann, lasse ich es bei einem Verweis auf die im Anhang beigefügten Abbildungen von M.C. Eschers "Belvedere" und "Andere Welt II" bewenden (Escher 1989).

Anderseits können künstliche Sprachen, da sie in ihrer logischen Ausdruckskraft ärmer sind als natürliche Sprachen, auch entsprechend weniger Ausdruckskraft der fundamentalkategorialen Basis "mitführen". Mit dem Verlust an logischer Ausdruckskraft formalisierter Sprachen gegenüber natürlichen geht daher mit der Unterbindung der verschiedenen Arten von Paradoxien stets auch ein Verlust an semiotischer Ausdruckskraft einher.

Literatur

Becker, Oskar (1990): *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung.* 4. Aufl. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Bense, Max (1967): Semiotik. *Allgemeine Theorie der Zeichen.* Baden-Baden: Agis.

Bense, Max (1975): *Semiotische Prozesse und Systeme in Wissenschaftstheorie und Design, Ästhetik und Mathematik.* Baden-Baden: Agis.

Bense, Max (1979): *Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen und die semiotische Konzeption der Kunst.* Baden-Baden: Agis.

Bense, Max (1986): *Die Eigenrealität des Zeichens.* In: Semiosis 42, S. 5-13.

Bense, Max (1988): *Eigenrealität und Daseinsrelativität.* In: Regina Claussen und Roland Daube-Schackat [Hrsg.], Gedankenzeichen. *Festschrift für Klaus Oehler zum 60. Geburtstag.* Tübingen: Stauffenburg, S. 119-121.

Bense, Max und Elisabeth Walther (1973): *Wörterbuch der Semiotik.* Köln: Kiepenheuer & Witsch.

Bochenski, Innozenz Maria und Albert Menne (1983): *Grundriß der formalen Logik.* 5. Auflage. Paderborn: Schöningh.

Carnap, Rudolf (1968): *Logische Syntax der Sprache.* 2. Aufl. Wien: Springer.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum und Wolfgang Thomas (1986): *Einführung in die mathematische Logik.* 2. Aufl. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft.

Erné, Marcel (1982): *Einführung in die Ordnungstheorie.* Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

Flechtner, Hans-Joachim (1984): *Grundbegriffe der Kybernetik.* Eine Einführung. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Frege, Gottlob (1893): *Grundgesetze der Arithmetik.* Begriffsschriftlich abgeleitet. I. Band. Jena: Pohle.

Frege, Gottlob (1903): *Grundgesetze der Arithmetik.* Begriffsgeschichtlich abgeleitet. II. Band. Jena: Pohle.

Frege, Gottlob (1976): *Wissenschaftlicher Briefwechsel.* Herausgegeben, bearbeitet, eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von G. Gabriel, H. Hermes u.a. Hamburg: Meiner.

Frege, Gottlob (1986): *Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien.* Hrsg. und eingeleitet von Günther Patzig. 6. Aufl. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Grelling, K. und N. Nelson (1908): *Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti.* In: Abhandlungen der Friesschen Schule (Neue Serie) 2, S. 301-324.

Russell, Bertrand (1908): *Mathematical logic as based on the theory of types.* In: American Journal of Mathematics 30, S. 222-262.

Suppes, Patrick (1972): *Axiomatic Set Theory.* New York: Dover.

Tarski, Alfred (1986a): *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen.* In: Givant, Steven R. and Ralph N. McKenzie, Alfred Tarski. Collected Papers. Vol. 2: 1935-1944, S. 53-198.

Tarski, Alfred (1986b): *The semantic conception of truth and the foundations of semantics.* In: Givant, Steven R. and Ralph N. McKenzie, Alfred Tarski. Collected Papers. Vol. 2: 1935-1944, S. 661-699.

Wall, Robert (1973): *Einführung in die Logik und Mathematik für Linguisten.* Bd. 1: Logik und Mengenlehre. Kronberg: Scriptor.

Walther, Elisabeth (1969): *Abriß der Semiotik.* In: arch+ 2, S. 3-13.

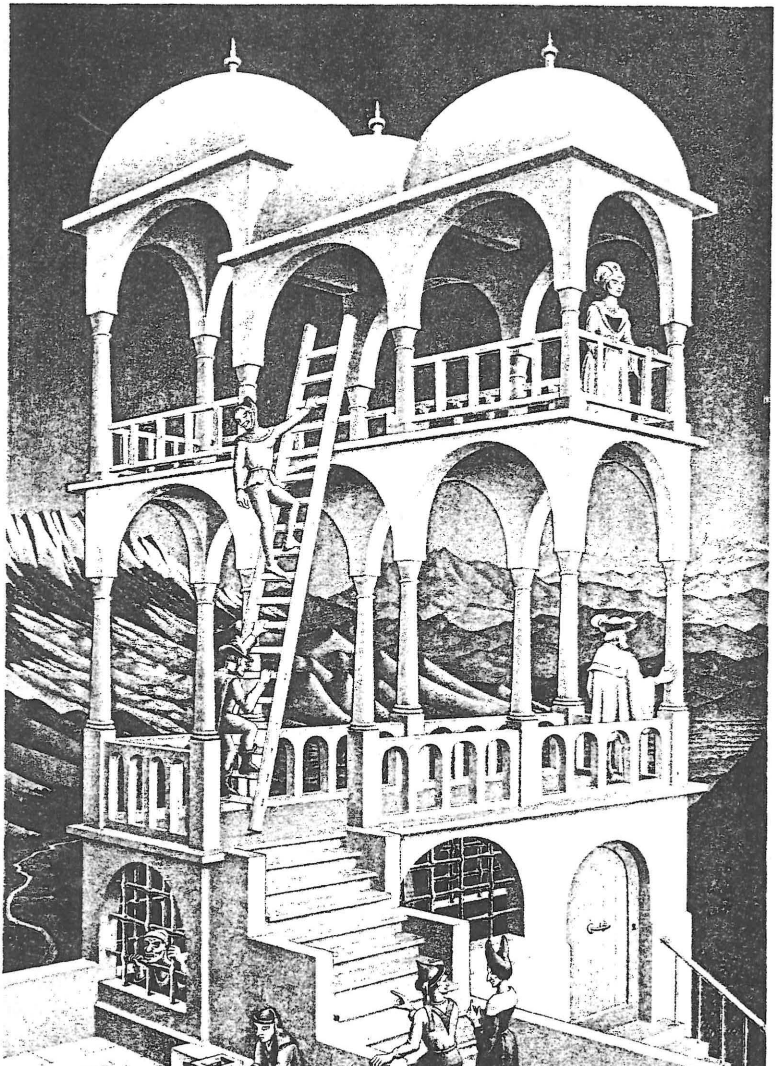
Walther, Elisabeth (1979): *Allgemeine Zeichenlehre.* Einführung in die Grundlagen der Semiotik. 2. Aufl. Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt.

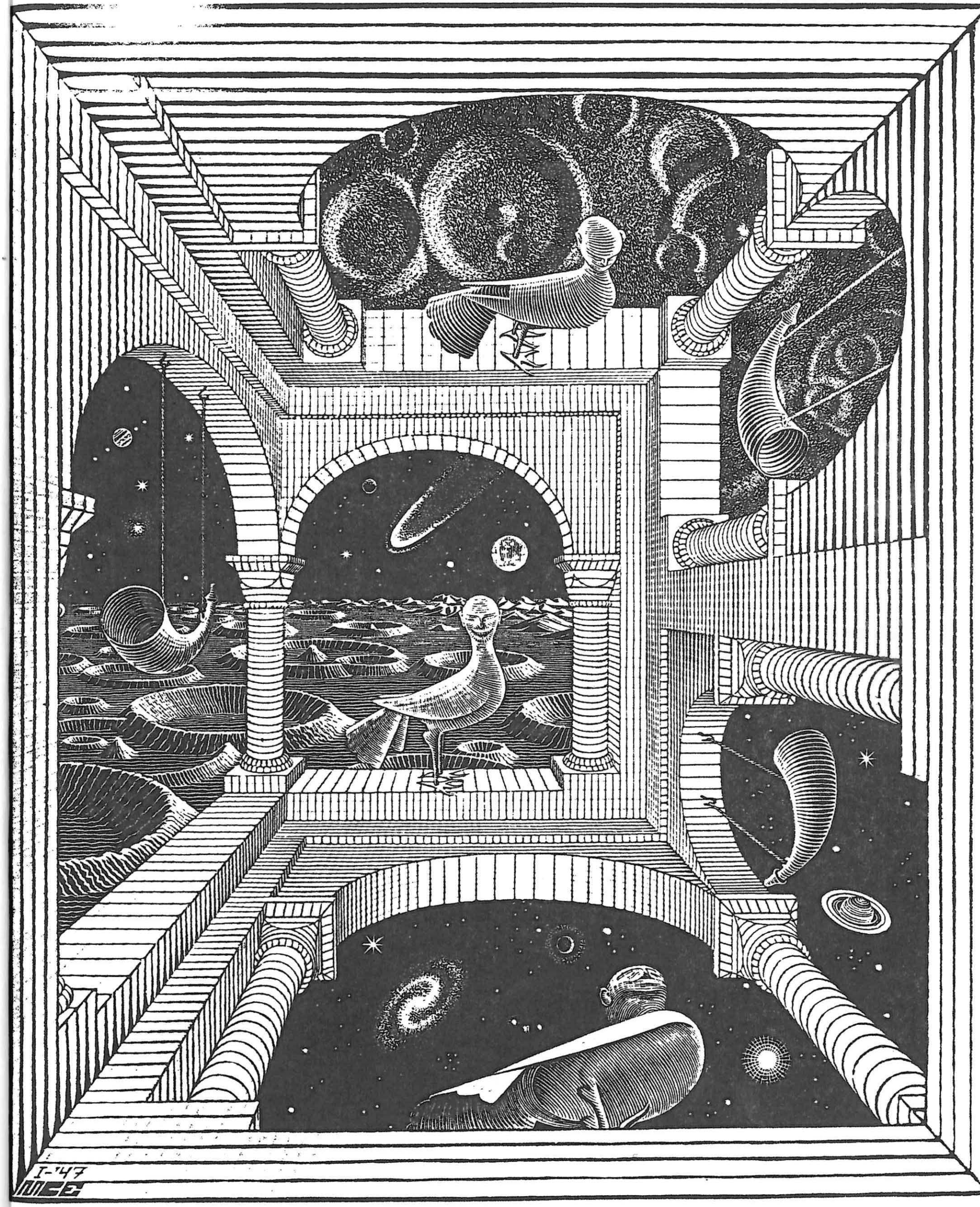
Walther, Elisabeth (1982): *Nachtrag zu "Trichotomischen Triaden".* In: Semiosis 27, S. 15-21.

Walther, Elisabeth (1985): *Semiotik der natürlichen Sprache.* In: Semiosis 39/40, S. 46-61.

Whitehead, Alfred North und Bertrand Russell (1990): *Principia Mathematica.* Vorwort und Einleitungen. Mit einem Beitrag von Kurt Gödel. 2. Aufl. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Zermelo, Ernst (1908): *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre.* I. In: Mathematische Annalen 65, S. 261-281.




I-'47

SEMIOSIS 69 70

Internationale Zeitschrift
für Semiotik und Ästhetik
18. Jahrgang, Heft 1/2 1993

Wir danken Herrn **Hans Lense,** Laupheim, für die großzügige Unterstützung, die er uns seit Jahren gewährt.
Herausgeberin und Redaktion

Inhalt